Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

1. Übungsblatt — Musterlösung

21. Oktober 2009

Aufgabe 46 (Meromorphe Fortsetzung der RIEMANN'schen ζ–Funktion)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ konvergiert!

b) Zeigen Sie für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2-2^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \quad !$$

Lösung:

a) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$. Sei $\sigma := \operatorname{Re}(s)$.
Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(-1)^n}{n^s} = \frac{\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^n}{x^s} - \int_1^x \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^{-s} \right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^n + s \cdot \int_1^x \frac{1}{t^{s+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \, \mathrm{d}t.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ ist $\sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor t \rfloor \text{ ungerade ist;} \\ 0, & \text{falls } \lfloor t \rfloor \text{ gerade ist.} \end{cases}$

Damit folgt $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^n \right) = 0$ und

$$\lim_{x\to\infty} \left| \int_1^x \frac{1}{t^{s+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \, \mathrm{d}t \right| \le \lim_{x\to\infty} \int_1^x \left| \frac{1}{t^{s+1}} \right| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \right| \mathrm{d}t \le \lim_{x\to\infty} \int_1^x t^{-1-\sigma} \, \mathrm{d}t$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{t^{-\sigma}}{-\sigma} \right]_{t=1}^{t=x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma x^\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma}.$$

Insbesondere konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^n \, \mathrm{d}t$ und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$. Dann gilt $\dfrac{2^z}{2-2^z} = \dfrac{1}{\frac{2}{2^z}-1} = \dfrac{1}{2^{1-z}-1}$.

Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{1-z} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^z} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^z} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^z}.$$

Die Grenzwertbetrachtung „$N \to \infty$" zeigt in Verbindung mit der Konvergenz der Reihen die Behauptung.

Aufgabe 47 (Identitätssatz für DIRICHLETreihen)
Seien $\mathbb{H} := \{s \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}(s) > 1\}$, $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$, und $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & b_n \end{array} \right\}$ derart, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$ absolut konvergent und holomorph in s sind und eine Folge $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{H} \\ \ell & \mapsto & z_\ell \end{array} \right\}$ mit $\lim\limits_{\ell \to \infty} \operatorname{Re}(z_\ell) = \infty$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_\ell}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{z_\ell}}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ existiert.
Zeigen Sie, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!

Lösung:
Seien $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & c_n := \dfrac{a_n - b_n}{n^2} \end{array} \right\}$ und $\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \ell & \mapsto & \sigma_\ell := \operatorname{Re}(z_\ell) \end{array} \right\}$.
Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > -1$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{c_n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n - b_n|}{n^{\operatorname{Re}(s)+2}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re}(s)+2}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{n^{\operatorname{Re}(s)+2}} = \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{n^{s+2}} \right| + \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{b_n}{n^{s+2}} \right|.$$

Durch die Grenzwertbetrachtung „$N \to \infty$" folgt die absolute Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $s > -1$ aus der absoluten Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$.

Insbesondere ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent und es gibt ein $C \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mit $|c_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Annahme: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq 0$. Sei $N_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, c_n \neq 0\}$.
Wegen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{z_\ell - 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{n^2 \cdot n^{z_\ell - 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_\ell}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{z_\ell}} = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ folgt für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{|c_{N_0}|}{N_0^{\sigma_\ell - 2}} = \left| -\frac{c_{N_0}}{N_0^{z_\ell - 2}} \right| = \left| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{z_\ell - 2}} \right| \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\sigma_\ell - 2}} \leq C \cdot \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_\ell - 2}}.$$

Wegen $\lim\limits_{\ell \to \infty} \operatorname{Re}(z_\ell) = \infty$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\sigma_\ell = \operatorname{Re}(z_\ell) > 3$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$.
Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$ folgt aus der Theorie der RIEMANN'schen Obersummen

$$0 < \frac{|c_{N_0}|}{N_0^{\sigma_\ell - 2}} \leq C \cdot \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_\ell - 2}} \leq C \cdot \int_{N_0}^{\infty} t^{2-\sigma_\ell} \, \mathrm{d}t = C \cdot \left[\frac{t^{3-\sigma_\ell}}{3 - \sigma_\ell} \right]_{t=N_0}^{t=\infty} = C \cdot \frac{N_0^{3-\sigma_\ell}}{\sigma_\ell - 3}.$$

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$ folgt wegen $\sigma_\ell > 1$ und $N_0 \geq 1$

$$\sigma_\ell \leq \frac{CN_0^5}{|c_{N_0}| \cdot N_0^{\sigma_\ell}} + 3 \leq \frac{CN_0^5}{|c_{N_0}|} + 3$$

im Widerspruch zu $\lim\limits_{\ell \to \infty} \sigma_\ell = \lim\limits_{\ell \to \infty} \operatorname{Re}(z_\ell) = \infty$.

Aufgabe 48 (Zweite MÖBIUS'sche Umkehrformel)
Seien $\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 1\}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ und $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array} \right\}$.

Sei $G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & G(x) := \sum\limits_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{n}\right) \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathcal{D}$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot G\left(\frac{x}{n}\right) \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathcal{D}$

$$\left| \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1 + \frac{1}{x} \quad !$$

Lösung:

a) Für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt nach Satz 5.10 (4) des Skripts zur Elementaren Zahlentheorie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot G\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 0(n)}}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{k}\right) \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ teilt } k}}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{k}\right) \cdot \varepsilon(k) \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

b) Für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt nach Aufgabenteil a) (setze $F := \mathbb{1}$)

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mu(n)}{n} \right| &= \left| \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \frac{x}{n} \right| = \frac{1}{x} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) \right| \\
&\overset{\text{a)}}{\leq} \frac{1}{x} \cdot \left(\mathbb{1}(x) + \left| \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \cdot \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \underbrace{|\mu(n)| \cdot \left| \frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \\
&\leq \frac{1}{x} + 1.
\end{aligned}$$