Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

2. Übungsblatt

28. Oktober 2009

Aufgabe 49 (Klausuraufgabe 6 aus der elementaren Zahlentheorie)

a) Stellen Sie die zweite Ableitung von ζ auf $\mathbb{H}$ als Dirichlet–Reihe dar!

b) Finden Sie eine Darstellung der zweiten logarithmischen Ableitung von ζ als Dirichlet–Reihe auf $\mathbb{H}$!

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 47

$$\Lambda \cdot \ln + \Lambda * \Lambda = \mu * \ln^2 \quad !$$

Aufgabe 50 (Nicht jede holomorphe Funktion kann als Dirichlet–Reihe geschrieben werden)
Geben Sie ein $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und eine Funktion an, die für kein $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ in der Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma \}$ als Dirichlet–Reihe geschrieben werden kann, jedoch auf $\{ s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 \}$ holomorph ist.

Aufgabe 51 (ζ–Identitäten)

a) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!

b) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\#\{p \in \mathbb{P} | p | n\}}}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!

c) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\{d \in \mathbb{N} | d | n^2\}}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!