Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

3. Übungsblatt

04. November 2009

Aufgabe 52 (Konvergenz von Dirichlet–Reihen)

Sei $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ derart, dass es für $A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & A(x) := \sum\limits_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n \end{array} \right\}$ ein $\delta \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|A(x)| \leq C \cdot x^\delta$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gibt.

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$ konvergiert und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_1^{\infty} \frac{A(t)}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$ gilt!

Aufgabe 53 (Mehr ζ–Identitäten)

Für alle $k \in \mathbb{R}$ sei $\sigma_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \sigma_k(n) := \sum\limits_{d|n} d^k \end{array} \right\}$.

a) Geben Sie für alle $k \in \mathbb{R}$ ein $\delta_k \in \mathbb{R}$ und eine für $\{ s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(s) > \delta_k \}$ gültige ζ–Formel für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}$ an!

b) Geben Sie ein $\delta \in \mathbb{R}$ und eine für $\{ s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(s) > \delta \}$ gültige ζ–Formel für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ an!

Aufgabe 54 (Divergenz von $\sum n^{-s}$ auf $\{ s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(s) = 1 \}$)

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ divergiert!