Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

3. Übungsblatt — Musterlösung

04. November 2009

Aufgabe 52 (Konvergenz von DIRICHLET–Reihen)

Sei $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ derart, dass es für $A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & A(x) := \sum\limits_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n \end{array} \right\}$ ein $\delta \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|A(x)| \leq C \cdot x^\delta$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gibt.

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$ konvergiert und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$ gilt!

Lösung:
Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$. Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ folgt mit partieller Summation

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{a_n}{n^s} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n}{x^s} - \int_1^x \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} a_n \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} t^{-s} \right) \mathrm{d}t = \frac{A(x)}{x^s} + s \cdot \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t. \qquad (\diamondsuit)$$

Sei $\eta := \mathrm{Re}(s) - \delta$. Wegen $\mathrm{Re}(s) > \delta$ ist $\eta \in \mathbb{R}^+$ und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{A(x)}{x^s} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{C \cdot x^\delta}{x^{\delta+\eta}} = C \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\eta} = 0.$$

Außerdem konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t$ wegen

$$\lim_{x\to\infty} \left| \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t \right| \leq \lim_{x\to\infty} \int_1^x \left| \frac{A(t)}{t^{s+1}} \right| \mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{|A(t)|}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}} \, \mathrm{d}t \leq \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{C \cdot t^\delta}{t^{1+\eta+\delta}} \, \mathrm{d}t$$

$$= C \cdot \lim_{x\to\infty} \int_1^x t^{-1-\eta} \, \mathrm{d}t = -\frac{C}{\eta} \cdot \lim_{x\to\infty} \left[t^{-\eta} \right]_{t=1}^{t=x} = -\frac{C}{\eta} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^\eta} - 1 \right) = \frac{C}{\eta}.$$

Nach $(\diamondsuit)$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ also gegen $s \cdot \int\limits_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t$.

Aufgabe 53 (Mehr ζ–Identitäten)

Für alle $k \in \mathbb{R}$ sei $\sigma_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \sigma_k(n) := \sum\limits_{d|n} d^k \end{array} \right\}$.

a) Geben Sie für alle $k \in \mathbb{R}$ ein $\delta_k \in \mathbb{R}$ und eine für $\{s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(s) > \delta_k\}$ gültige ζ–Formel für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}$ an!

b) Geben Sie ein $\delta \in \mathbb{R}$ und eine für $\{s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(s) > \delta\}$ gültige ζ–Formel für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ an!

Lösung:

a) Sei $P_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & P_k(n) := n^k \end{array} \right\}$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist $\sigma_k = P_k * \mathbb{1}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1 + k$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}} = \zeta(s-k). \qquad (✥)$$

Ferner ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}(n)}{n^s} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Für alle $k \in \mathbb{R}$ sei also

$$\delta_k := \max\{1; k+1\}.$$

Dann gilt nach Satz 7.4 für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-k).$$

b) μ, φ und $\mathrm{id} := P_1$ sind multiplikativ. Für alle $p \in \mathbb{P}$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(\mu * \mathrm{id})\left(p^\ell\right) &= \sum_{d|p^\ell} \mu(d) \cdot \mathrm{id}\left(\frac{p^\ell}{d}\right) = \sum_{j=0}^{\ell} \mu\left(p^j\right) \cdot \mathrm{id}\left(p^{\ell-j}\right) \\ &= 1 \cdot p^\ell + (-1) \cdot p^{\ell-1} + \sum_{j=2}^{\ell} 0 = (p-1) \cdot p^{\ell-1} = \varphi\left(p^\ell\right).\end{aligned}$$

Also ist $\varphi = \mu * \mathrm{id} = \mu * P_1$. Sei

$$\delta := 2.$$

Nach (✥), Satz 7.4 und Beispiel 7.5 (i) folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Aufgabe 54 (Divergenz von $\sum n^{-s}$ auf $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) = 1\}$)
Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\mathrm{i}t}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ divergiert!

Lösung:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\mathrm{i}\cdot 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe und divergiert. Sei nun also $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^{1+\mathrm{i}t}} &= \frac{\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1}{x^{1+\mathrm{i}t}} - \int_1^x \sum_{n=1}^{\lfloor u \rfloor} 1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} u^{-1-\mathrm{i}t} \right) \mathrm{d}u = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} + (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^{\mathrm{i}t}} - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} + (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x u^{-1-\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}u - (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x^{\mathrm{i}t}} - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} - \frac{1+\mathrm{i}t}{\mathrm{i}t} \cdot \left[u^{-\mathrm{i}t} \right]_{u=1}^{u=x} - (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x \frac{u - \lfloor u \rfloor}{t^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x^{\mathrm{i}t}} \cdot \left(1 - \frac{1+\mathrm{i}t}{\mathrm{i}t} \right) - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} + \frac{1+\mathrm{i}t}{\mathrm{i}t} - (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\mathrm{i}}{t x^{\mathrm{i}t}} + 1 - \frac{\mathrm{i}}{t} - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} - (1+\mathrm{i}t) \cdot \int_1^x \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}u. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{|x - \lfloor x \rfloor|}{|x^{1+\mathrm{i}t}|} \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \int_1^x \left| \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{2+\mathrm{i}t}} \right| \mathrm{d}u &= \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{|u - \lfloor u \rfloor|}{|u^{2+\mathrm{i}t}|} \,\mathrm{d}u \le \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{u^2} \,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{u=1}^{t=x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Also gilt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{1+\mathrm{i}t}} = 0$ und $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{2+\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}u$ konvergiert.
Aus der Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\mathrm{i}t}}$ und ($\star$) würde damit die Existenz von $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\mathrm{i}t}}$ folgen.
Wegen

$$\frac{1}{x^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{-\ln(x)\cdot \mathrm{i}t} = \cos(-\ln(x) \cdot t) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\ln(x) \cdot t)$$

existiert $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\mathrm{i}t}}$ aber nicht.