Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

5. Übungsblatt

18. November 2009

Aufgabe 58 (Satz von Landau)
Sei $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass es ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) < \sigma_0$ divergiert.
Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ maximal derart, dass $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & f\,(s) \end{array} \right\}$ holomorph auf $\mathcal{D}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathcal{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ ist.
Zeigen Sie, dass $\sigma_0 \notin \mathcal{D}$ ist!
Tipp: Entwickeln Sie f unter der Annahme $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ in eine Potenzreihe um $\sigma_0 + 1$ und zeigen Sie unter Beachtung deren Konvergenzradius', dass die Dirichlet–Reihe dann auch an einigen Stellen in der Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}\,(s) < \sigma_0 \}$ konvergiert!

Aufgabe 59 (Potenzreihen)

a) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1)^2 \cdot z^\ell = \frac{1 + z}{(1 - z)^3} \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \cdot z^\ell = \frac{1}{(1 - z)^2} \quad !$$

Aufgabe 60 (Verallgemeinerung einer Formel von RAMANUJAN nach INGHAM (1930))
Für alle $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_a := \sup\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a_n \neq 0}} \frac{\ln(|a_n|)}{\ln(n)} \in \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta_a$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ absolut konvergent. Für alle $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_a < \infty$ sei

$$D_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \delta_a\} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & D_a(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \end{array} \right\}.$$

a) Zeigen Sie für alle vollständig multiplikativen $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_a \in \mathbb{R}$ und alle vollständig multiplikativen $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & b_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_b \in \mathbb{R}$ sowie alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \max\{1; 1+\delta_a; 1+\delta_b; 1+\delta_{ab}; 1+\delta_a+\delta_b\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * \mathbb{1})(n) \cdot (b * \mathbb{1})(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \cdot D_a(s) \cdot D_b(s) \cdot D_{ab}(s)}{D_{ab}(2s)} \quad !$$

Tipp: Betrachten Sie die Faktoren des EULER–Produkts der linken Seite und untersuchen Sie Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p = 1$ oder $b_p = 1$ gesondert!

Bemerkung: Die linke Seite konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta_a + \delta_b$ absolut, da die Zählerfunktion durch das Quadrat der Teileranzahlfunktion τ multipliziert mit der Potenz $\mathrm{id}^{\delta_a+\delta_b}$ abgeschätzt werden kann.

b) Sei $\sigma_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \sigma_k(n) := \sum\limits_{d|n} d^k \end{array} \right\}$ für alle $k \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ die für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re}(s) > \max\{1; 1+\operatorname{Re}(w); 1+\operatorname{Re}(z); 1+\operatorname{Re}(w)+\operatorname{Re}(z)\}$$

gültige RAMANUJAN–Formel

$$\frac{\zeta(s) \cdot \zeta(s-w) \cdot \zeta(s-z) \cdot \zeta(s-w-z)}{\zeta(2s-w-z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_w(n) \cdot \sigma_z(n)}{n^s} \quad !$$