Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

5. Übungsblatt — Musterlösung

18. November 2009

Aufgabe 58 (Satz von Landau)
Sei $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass es ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) < \sigma_0$ divergiert.
Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ maximal derart, dass $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & f\,(s) \end{array} \right\}$ holomorph auf $\mathcal{D}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathcal{D}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ ist.
Zeigen Sie, dass $\sigma_0 \notin \mathcal{D}$ ist!
Tipp: Entwickeln Sie f unter der Annahme $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ in eine Potenzreihe um $\sigma_0 + 1$ und zeigen Sie unter Beachtung deren Konvergenzradius', dass die Dirichlet–Reihe dann auch an einigen Stellen in der Halbebene $\{\, s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}\,(s) < \sigma_0\}$ konvergiert!

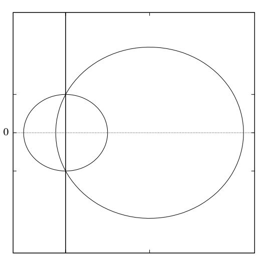
Lösung:
Annahme: $\sigma_0 \in \mathcal{D}$
$\mathcal{D}$ ist als Gebiet offen. Deshalb gibt es ein $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$, so dass $\{\, s \in \mathbb{C} |\, |s - \sigma_0| < \delta_0\} \subseteq \mathcal{D}$ ist.
Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ konvergiert, folgt

$$\mathcal{D} \supseteq \{\, s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0 \text{ oder } |s - \sigma_0| < \delta_0\} .$$

Außerdem ist f in einer Umgebung von $\sigma_0 + 1$ holomorph und kann dort in eine Potenzreihe entwickelt werden.
Es gibt also ein (maximal gewähltes) $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, so dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|\sigma_0 + 1 - s| < r$

$$f\,(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{f^{(\ell)}\,(\sigma_0 + 1)}{\ell!} \cdot (s - \sigma_0 - 1)^{\ell}$$

gilt.
Zur Bestimmung des Konvergenzradius' r lässt sich sagen, dass die Punkte, die am nächsten zu $\sigma_0 + 1$ und nicht sicher in $\mathcal{D}$ liegen, die Punkte $\sigma_0 + \mathrm{i}\delta_0$ und $\sigma_0 - \mathrm{i}\delta_0$ sind.



Also ist f auf $\left\{s \in \mathbb{C} \,|\, |s-\sigma_0-1| < \sqrt{1+\delta_0^2}\right\}$ sicher holomorph und mit

$$\delta := -1+\sqrt{1+\delta_0^2} \qquad \text{folgt} \qquad \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad r \geq 1+\delta.$$

Ferner gilt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(\ell)}(\sigma_0+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln(n))^\ell \cdot a_n}{n^{\sigma_0+1}} = (-1)^\ell \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\ell(n) \cdot a_n}{n^{\sigma_0+1}}.$$

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|s-\sigma_0-1| < 1+\delta$

$$f(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\sigma_0+1-s)^\ell}{\ell!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\ell(n) \cdot a_n}{n^{\sigma_0+1}}.$$

In dieser Doppelsumme sind alle Terme positiv (oder verschwindend), falls $s \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_0-\delta < s \leq \sigma_0+1$ vorausgesetzt wird. Insbesondere ist die Doppelsumme absolut konvergent und es darf beliebig umgeordnet werden.
Damit folgt für alle $s \in (\sigma_0-\delta; \sigma_0+1]$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0+1}} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ln(n) \cdot (\sigma_0+1-s))^\ell}{\ell!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0+1}} \cdot \mathrm{e}^{\ln(n)\cdot(\sigma_0+1-s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in (\sigma_0-\delta; \sigma_0+1]$ und insbesondere zum Beispiel für

$$z := \sigma_0 - \tfrac{\delta}{2} < \sigma_0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ wegen $\mathrm{Re}(z) < \sigma_0$ divergiert.

Aufgabe 59 (Potenzreihen)

a) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)^2 \cdot z^\ell = \frac{1+z}{(1-z)^3} \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \cdot z^\ell = \frac{1}{(1-z)^2} \quad !$$

Lösung:

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}&(1-z)^3 \cdot \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^\ell - 3 \cdot \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^{\ell+1} + 3 \cdot \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^{\ell+2} - \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^{\ell+3} \\ &= 1 + (4-3) \cdot z + (9-12+3) \cdot z^2 + \sum_{\ell=3}^{N} \left((\ell+1)^2 - 3\ell^2 + 3 \cdot (\ell-1)^2 - (\ell-2)^2\right) \cdot z^\ell \\ &+ \left(\left(-3 \cdot (N+1)^2 + 3N^2 - (N-1)^2\right) + \left(3 \cdot (N+1)^2 - N^2\right) \cdot z - (N+1)^2 \cdot z^2\right) \cdot z^{N+1}.\end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{C}$ sind

$$\begin{aligned}&(x+1)^2 - 3x^2 + 3 \cdot (x-1)^2 - (x-2)^2 \\ &\quad = x^2 + 2x + 1 - 3x^2 + 3x^2 - 6x + 3 - x^2 + 4x - 4 = 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&-3 \cdot (x+1)^2 + 3x^2 - (x-1)^2 \\ &\quad = -3x^2 - 6x - 3 + 3x^2 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2.\end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned}&(1-z)^3 \cdot \sum_{\ell=0}^{N} (\ell+1)^2 \cdot z^\ell \\ &\qquad = 1 + z - (N+2)^2 \cdot z^{N+1} + \left(2N^2 + 6N + 3\right) \cdot z^{N+2} - (N+1)^2 \cdot z^{N+3}.\end{aligned}$$

Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, so gehen die letzten drei Summanden für $N \to \infty$ gegen 0 und damit folgt die Behauptung.

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $\sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell$ absolut konvergent gegen $\frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$.

Insbeondere darf gliedweise differenziert werden, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1 \cdot (1-z) - z \cdot (-1)}{(1-z)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{1-z} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot z^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \cdot z^\ell.\end{aligned}$$

Aufgabe 60 (Verallgemeinerung einer Formel von Ramanujan nach Ingham (1930))

Für alle $a : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}\right\}$ mit $\delta_a := \sup\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a_n \neq 0}} \frac{\ln(|a_n|)}{\ln(n)} \in \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1 + \delta_a$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ absolut konvergent. Für alle $a : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}\right\}$ mit $\delta_a \in \mathbb{R}$ sei

$$D_a : \left\{\begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) > \delta_a\} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & D_a(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \end{array}\right\}.$$

a) Zeigen Sie für alle vollständig multiplikativen $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_a \in \mathbb{R}$ und alle vollständig multiplikativen $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & b_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_b \in \mathbb{R}$ sowie alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \max\{1; 1+\delta_a; 1+\delta_b; 1+\delta_{ab}; 1+\delta_a+\delta_b\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * \mathbb{1})(n) \cdot (b * \mathbb{1})(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \cdot D_a(s) \cdot D_b(s) \cdot D_{ab}(s)}{D_{ab}(2s)} \quad !$$

Tipp: Betrachten Sie die Faktoren des EULER–Produkts der linken Seite und untersuchen Sie Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p = 1$ oder $b_p = 1$ gesondert!

Bemerkung: Die linke Seite konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta_a+\delta_b$ absolut, da die Zählerfunktion durch das Quadrat der Teileranzahlfunktion τ multipliziert mit der Potenz $\mathrm{id}^{\delta_a+\delta_b}$ abgeschätzt werden kann.

b) Sei $\sigma_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \sigma_k(n) := \sum\limits_{d \mid n} d^k \end{array} \right\}$ für alle $k \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ die für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}\,(s) > \max\{1; 1+\mathrm{Re}\,(w); 1+\mathrm{Re}\,(z); 1+\mathrm{Re}\,(w)+\mathrm{Re}\,(z)\}$$

gültige RAMANUJAN–Formel

$$\frac{\zeta(s) \cdot \zeta(s-w) \cdot \zeta(s-z) \cdot \zeta(s-w-z)}{\zeta(2s-w-z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_w(n) \cdot \sigma_z(n)}{n^s} \quad !$$

Lösung:

a) Für alle vollständig multiplikativen $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $\delta_a \in \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta_a$ gelten

$$\left|\frac{a_p}{p^s}\right| = \frac{|a_p|}{p^{\mathrm{Re}(s)}} \begin{cases} = 0, & \text{falls } a_p = 0 \text{ ist;} \\ < \dfrac{|a_p|}{p^{1+\delta_a}} < \dfrac{|a_p|}{p^{\frac{\ln(|a_p|)}{\ln(p)}}} = 1, & \text{falls } a_p \neq 0 \text{ ist,} \end{cases} \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{a_p}{p^s}\right| < 1$$

für alle $p \in \mathbb{P}$ und nach dem EULER'schen Produktsatz

$$D_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{p^\ell}}{(p^s)^\ell} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a_p}{p^s}\right)^\ell = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{a_p}{p^s}}.$$

Seien $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ und $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & b_n \end{array} \right\}$ vollständig multiplikativ mit $\delta_a \in \mathbb{R}$ und $\delta_b \in \mathbb{R}$. Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \max\{1; 1+\delta_a; 1+\delta_b; 1+\delta_{ab}; 1+\delta_a+\delta_b\}$.

Mit dem EULER'schen Produktsatz folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * \mathbb{1})(n) \cdot (b * \mathbb{1})(n)}{n^s} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a * \mathbb{1})(p^\ell) \cdot (b * \mathbb{1})(p^\ell)}{(p^s)^\ell} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{d \mid p^\ell} a_d \cdot \sum_{c \mid p^\ell} b_c \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} a_{p^j} \cdot \sum_{k=1}^{\ell} b_{p^k} \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} a_p^j \cdot \sum_{k=0}^{\ell} b_p^k \cdot \frac{1}{p^{\ell s}}. \end{aligned}$$

Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p \neq 1$ und $b_p \neq 1$ ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} a_p^j \cdot \sum_{k=0}^{\ell} b_p^k \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1-a_p^{\ell+1}}{1-a_p} \cdot \frac{1-b_p^{\ell+1}}{1-b_p} \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} \\
&= \frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^{\ell} - a_p \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a_p}{p^s}\right)^{\ell} - b_p \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_p}{p^s}\right)^{\ell} + a_p b_p \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a_p b_p}{p^s}\right)^{\ell}}{(1-a_p)\cdot(1-b_p)} \\
&= \frac{1}{(1-a_p)\cdot(1-b_p)} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} - \frac{a_p}{1-\frac{a_p}{p^s}} - \frac{b_p}{1-\frac{b_p}{p^s}} + \frac{a_p b_p}{1-\frac{a_p b_p}{p^s}} \right) \\
&= \frac{1}{(1-a_p)\cdot(1-b_p)} \cdot \left(\frac{\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right) - a_p \cdot \left(1-\frac{1}{p^s}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)} - \frac{b_p \cdot \left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right) - a_p b_p \cdot \left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)}{\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{1-b_p} \cdot \frac{\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right) - b_p \cdot \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)} \\
&= \frac{1}{1-b_p} \cdot \frac{1-\frac{b_p}{p^s}-\frac{a_p b_p}{p^s}+b_p\cdot\frac{a_p b_p}{p^{2s}}-b_p+\frac{b_p}{p^s}+\frac{a_p b_p}{p^s}-\frac{a_p b_p}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)} \\
&= \frac{1-\frac{a_p b_p}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)}.
\end{aligned}
$$

Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p = 1 = b_p$ ist nach Aufgabe 59 a) wegen $\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^{\mathrm{Re}(s)}} < \frac{1}{p} < 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} a_p^j \cdot \sum_{k=0}^{\ell} b_p^k \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\ell} 1\right)^2 \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1)^2 \cdot \left(\frac{1}{p^s}\right)^{\ell} = \frac{1+\frac{1}{p^s}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^3} \\
&= \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4} = \frac{1-\frac{a_p b_p}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)}.
\end{aligned}
$$

Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p = 1$ und $b_p \neq 1$ ist nach Aufgabe 59 b)

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} a_p^j \cdot \sum_{k=0}^{\ell} b_p^k \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} 1 \cdot \frac{1-b_p^{\ell+1}}{1-b_p} \cdot \frac{1}{p^{\ell s}} \\
&= \frac{1}{1-b_p} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \cdot \left(\frac{1}{p^s}\right)^{\ell} - \frac{b_p}{1-b_p} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \cdot \left(\frac{b_p}{p^s}\right)^{\ell} \\
&= \frac{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2} - \frac{b_p}{\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)^2}}{1-b_p} = \frac{1-\frac{2b_p}{p^s}+\frac{b_p^2}{p^{2s}} - b_p \cdot \left(1-\frac{2}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)}{(1-b_p)\cdot\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)^2} \\
&= \frac{1-\frac{b_p}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)^2} = \frac{1-\frac{a_p b_p}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{b_p}{p^s}\right)\cdot\left(1-\frac{a_p b_p}{p^s}\right)}
\end{aligned}
$$

wegen

$$\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^{\mathrm{Re}(s)}} < \frac{1}{p} < 1 \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{b_p}{p^s}\right| < 1.$$

Analog folgt dieselbe Formel für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $a_p \neq 1$ und $b_p = 1$.

Mit der Formel, die für die linke Seite aus dem EULER–Produkt gewonnen wurde, der Definition von g. und der EULER–Produkt–Darstellung von ζ ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a * \mathbb{1})(n) \cdot (b * \mathbb{1})(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \cdot D_a(s) \cdot D_b(s) \cdot D_{ab}(s)}{D_{ab}(2s)}.$$

b) Sei $P_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & P_k(n) := n^k \end{array} \right\}$ für alle $k \in \mathbb{C}$.

Für alle $k \in \mathbb{C}$, alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_k(mn) = (mn)^k = m^k \cdot n^k = P_k(m) \cdot P_k(n).$$

P_k ist also für alle $k \in \mathbb{C}$ vollständig multiplikativ mit

$$\delta_{P_k} = \sup_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ P_k(p) \neq 0}} \frac{\ln(|P_k(p)|)}{\ln(p)} = \sup_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln\left(p^{\mathrm{Re}(k)}\right)}{\ln(p)} = \sup_{p \in \mathbb{P}} (\mathrm{Re}(k)) = \mathrm{Re}(k).$$

Für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ ist $P_w \cdot P_z = P_{w+z}$, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_w(n) \cdot P_z(n) = n^w \cdot n^z = n^{w+z} = P_{w+z}(n)$$

Für alle $k \in \mathbb{C}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1 + \mathrm{Re}(k)$ gilt außerdem

$$D_{P_k}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}} = \zeta(s-k).$$

Zuguterletzt ist für alle $k \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$(P_k * \mathbb{1})(n) = \sum_{d|n} P_k(d) \cdot \mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^k \cdot 1 = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n).$$

Damit folgt die Behauptung direkt aus Aufgabenteil a).