Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

7. Übungsblatt

02. Dezember 2009

Aufgabe 64 $\left(\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} \mu(n) = o(x)\right)$

Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)\right) = 0 \quad !$$

Tipp: Zeigen Sie mit dem Newman'schen Tauber–Satz, dass $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor \mathrm{e}^t\rfloor}\mu(n)\,\mathrm{d}t$ konvergiert und folgern Sie hieraus die Behauptung!

Aufgabe 65 (Größenordnung der n–ten Primzahl)

Sei $p : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{P} \\ n & \mapsto & p_n \end{array}\right\}$ mit $n = \#\{q\in\mathbb{P}\,|\, q \le p_n\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
Das heißt, p_n ist für alle $n\in\mathbb{N}$ die n–te Primzahl.
Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{n\cdot\ln(n)}\right) = 1 \quad !$$

Aufgabe 66 (Größenordnung von ω)

Sei $\omega : \left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & \omega(n) := \#\{p\in\mathbb{P}\,|\, p \text{ teilt } n\} \end{array}\right\}$.

a) Zeigen Sie

$$\#\left\{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,\middle|\,\omega(n) > (1-\varepsilon)\cdot\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right\} = \infty$$

für alle $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$!

b) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ein $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\setminus\{1;2\}$ mit

$$\omega(n) \le (1+\varepsilon)\cdot\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge n_0(\varepsilon)$ existiert!

Tipp: Zahlen mit „besonders großem“ ω–Wert sind die Produkte aller Primzahlen, die kleiner als eine positive reelle Zahl sind.