Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

7. Übungsblatt — Musterlösung

02. Dezember 2009

Aufgabe 64 $\left(\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)=o(x)\right)$

Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)\right)=0\quad !$$

Tipp: Zeigen Sie mit dem NEWMAN'schen TAUBER–Satz, dass $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor \mathrm{e}^t\rfloor}\mu(n)\,\mathrm{d}t$ konvergiert und folgern Sie hieraus die Behauptung!

Lösung:

Seien $M:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & M(x):=\sum\limits_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)\end{array}\right\}$ und $f:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^+\cup\{0\} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & f(t):=\dfrac{M(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}\end{array}\right\}$.

Für alle $x\in\mathbb{R}^+$ gilt

$$|M(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)\right|\le\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}|\mu(n)|\le\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}1=\lfloor x\rfloor\le x$$

und deshalb ist f auf $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ durch 1 beschränkt.

Sei $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{C} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t):=\begin{cases}1, & \text{falls } t\in\mathcal{A}\text{ ist}\\ 0, & \text{falls } t\notin\mathcal{A}\text{ ist}\end{cases}\end{array}\right\}$ für alle $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{C}$.

Für alle $a\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^a\frac{M(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t=\int_0^a\mathrm{e}^{-t}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\mathbb{1}_{[1;\mathrm{e}^t]}(n)\cdot\mu(n)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\mu(n)\cdot\int_0^a\frac{\mathbb{1}_{[1;\mathrm{e}^t]}(n)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\mu(n)\cdot\int_{\ln(n)}^a\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\mu(n)\cdot\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=\ln(n)}^{t=a}=\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\frac{\mu(n)}{n}-\frac{1}{\mathrm{e}^a}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor\mathrm{e}^a\rfloor}\mu(n)\end{aligned}$$

und insbesondere ist f auf $[0;a]$ RIEMANN–integrierbar.

Für alle $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)>1$ und alle $x\in\mathbb{R}^+$ folgt mit partieller Summation

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{x^s}\cdot\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)-\int_1^x\sum_{n=1}^{\lfloor t\rfloor}\mu(n)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-s}\right)\mathrm{d}t=\frac{M(x)}{x^s}+s\cdot\int_1^x\frac{M(t)}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Die Substitutionen $u := \ln(t)$ und $z := s - 1$ liefern für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mu(n)}{n^{z+1}} = \frac{M(x)}{x^{1+z}} + (z+1) \cdot \int_0^{\ln(x)} \frac{M(e^u)}{e^u} \cdot e^{-uz} \, du.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ ist $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{M(x)}{x^{1+z}} = 0$ wegen

$$0 \leq \lim_{x \to \infty} \left| \frac{M(x)}{x^{1+z}} \right| = \lim_{x \to \infty} \frac{|M(x)|}{x^{1+\operatorname{Re}(z)}} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^{1+\operatorname{Re}(z)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\operatorname{Re}(z)}} = 0.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ konvergiert $\displaystyle\int_0^\infty \frac{M(e^u)}{e^u} \cdot e^{-uz} \, du$ absolut wegen

$$\int_0^\infty \left| \frac{M(e^u)}{e^u} \cdot e^{-uz} \right| du = \int_0^\infty \frac{|M(e^u)|}{e^u} \cdot e^{-u \operatorname{Re}(z)} \, du \leq \int_0^\infty e^{-u \operatorname{Re}(z)} \, du = \left[\frac{e^{-u \operatorname{Re}(z)}}{-\operatorname{Re}(z)} \right]_{u=0}^{u=\infty} = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Wegen $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ folgt also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\frac{1}{(z+1) \cdot \zeta(z+1)} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-tz} \, dt.$$

Wegen der Nullstellenfreiheit von ζ auf der 1–Geraden und da Nullstellen holomorpher Funktionen diskret liegen, ist die linke Seite analytisch fortsetzbar auf ein Gebiet, dass die imaginäre Achse umfasst und mit dem Newman'schen Tauber–Satz 7.8 folgt, dass

$$\int_0^\infty \frac{M(e^t)}{e^t} \, dt \qquad \text{konvergiert.}$$

<u>Annahme:</u> $\limsup\limits_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} > 0$

Wegen $\left| \frac{M(x)}{x} \right| = \frac{|M(x)|}{x} \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $\alpha \in (0;1]$ mit $\limsup\limits_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = \alpha$.

Insbesondere gibt es eine Folge $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^+ \\ \ell & \mapsto & u_\ell \end{array} \right\}$ mit

$$\lim_{\ell \to \infty} u_\ell = \infty \qquad \text{und} \qquad M(e^{u_\ell}) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot e^{u_\ell}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \leq x$ gilt

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) = \sum_{n=1}^{\lfloor y \rfloor} \mu(n) + \sum_{n=\lfloor y \rfloor + 1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \geq M(y) - \sum_{n=\lfloor y \rfloor + 1}^{\lfloor x \rfloor} 1 \\ &= M(y) - (\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor) \geq M(y) - (x - y + 1). \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{u_\ell}^{u_\ell+c} \frac{M\left(\mathrm{e}^t\right)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t &\geq \int\limits_{u_\ell}^{u_\ell+c} \frac{M\left(\mathrm{e}^{u_\ell}\right) - \left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{u_\ell} + 1\right)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq \left(M\left(\mathrm{e}^{u_\ell}\right) - \mathrm{e}^{u_\ell+c} + \mathrm{e}^{u_\ell} - 1\right) \cdot \int\limits_{u_\ell}^{u_\ell+c} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(M\left(\mathrm{e}^{u_\ell}\right) - \mathrm{e}^{u_\ell+c} + \mathrm{e}^{u_\ell} - 1\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{-u_\ell} - \mathrm{e}^{-u_\ell-c}\right) \\
&= \frac{M\left(\mathrm{e}^{u_\ell}\right)}{\mathrm{e}^{u_\ell}} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-c}\right) + \left(-\mathrm{e}^c + 1\right) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-c}\right) - \frac{1 - \mathrm{e}^{-c}}{\mathrm{e}^{u_\ell}} \\
&\geq \left(\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \mathrm{e}^c\right) - \frac{1}{\mathrm{e}^{u_\ell}}\right) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-c}\right)
\end{aligned}$$

Für alle $c \in \left(0; \ln\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)\right)$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $u_\ell > \ln\left(\frac{8}{\alpha}\right)$ folgt

$$\int\limits_{u_\ell}^{u_\ell+c} \frac{M\left(\mathrm{e}^t\right)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \geq \left(\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \mathrm{e}^c\right) - \frac{1}{\mathrm{e}^{u_\ell}}\right) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-c}\right) \geq \frac{\alpha}{8} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-c}\right) > 0.$$

Wegen $\lim\limits_{\ell \to \infty} u_\ell = \infty$ divergiert $\int\limits_0^\infty \frac{M\left(\mathrm{e}^t\right)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ nach dem CAUCHY–Konvergenzkriterium.
Dies ist ein Widerspruch zum oben Bewiesenen.
Analog konsturiert man einen Widerspruch zur Annahme, dass $\liminf\limits_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} < 0$ sei.
Insbesondere folgt die Behauptung wegen

$$0 \leq \liminf_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} \leq 0.$$

Aufgabe 65 (Größenordnung der n–ten Primzahl)
Sei $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{P} \\ n & \mapsto & p_n \end{array} \right\}$ mit $n = \#\left\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p_n\right\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das heißt, p_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die n–te Primzahl.
Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{p_n}{n \cdot \ln(n)}\right) = 1 \quad !$$

Lösung:
Für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt es wegen des Primzahlsatzes ein $n_1(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$p_n^{1-\delta} \leq \pi(p_n) = n \leq p_n^{1+\delta}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1(\delta)$.
Logarithmieren liefert für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_1(\delta)$

$$(1 - \delta) \cdot \ln(p_n) \leq \ln(n) \leq (1 + \delta) \cdot \ln(p_n).$$

Für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ gibt es wiederum wegen des Primzahlsatzes ein $n_2(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$(1 - \delta) \cdot \frac{p_n}{\ln(p_n)} \leq \pi(p_n) = n \leq (1 + \delta) \cdot \frac{p_n}{\ln(p_n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_2(\delta)$.

Für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\delta) := \max\{n_1(\delta); n_2(\delta)\}$ gilt also

$$\frac{p_n}{n \cdot \ln(n)} \geq \frac{\frac{n \cdot \ln(p_n)}{1+\delta}}{n \cdot \ln(n)} = \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{\ln(p_n)}{\ln(n)} \geq \frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - \frac{2\delta + \delta^2}{(1+\delta)^2}.$$

Für alle $\delta \in (0;1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\delta)$ gilt außerdem

$$\frac{p_n}{n \cdot \ln(n)} \leq \frac{\frac{n \cdot \ln(p_n)}{1-\delta}}{n \cdot \ln(n)} = \frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{\ln(p_n)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + \frac{2\delta - \delta^2}{(1-\delta)^2}.$$

Für alle $\delta \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ ist $\dfrac{2\delta + \delta^2}{(1+\delta)^2} \leq \dfrac{2\delta - \delta^2}{(1-\delta)^2}$ wegen

$$\begin{aligned}
\frac{2\delta - \delta^2}{(1-\delta)^2} - \frac{2\delta + \delta^2}{(1+\delta)^2} &= \delta \cdot \frac{(2-\delta) \cdot (1 + 2\delta + \delta^2) - (2+\delta) \cdot (1 - 2\delta + \delta^2)}{(1-\delta)^2 \cdot (1+\delta)^2} \\
&= \delta \cdot \frac{2 + 4\delta + 2\delta^2 - \delta - 2\delta^2 - \delta^3 - 2 + 4\delta - 2\delta^2 - \delta + 2\delta^2 - \delta^3}{(1-\delta)^2 \cdot (1+\delta)^2} \\
&= \delta \cdot \frac{6\delta - 2\delta^3}{(1-\delta)^2 \cdot (1+\delta)^2} = \frac{2\delta^2 \cdot (3 - \delta^2)}{(1-\delta)^2 \cdot (1+\delta)^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Für alle $\delta \in (0;1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\delta)$ folgt also

$$-\frac{2\delta + \delta^2}{(1+\delta)^2} \leq \frac{p_n}{n \cdot \ln(n)} - 1 \leq \frac{2\delta - \delta^2}{(1-\delta)^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\frac{p_n}{n \cdot \ln(n)} - 1\right| \leq \frac{2\delta + \delta^2}{(1+\delta)^2}.$$

Für alle $\varepsilon \in (0;1)$ seien nun $\delta_\varepsilon \in \left(0; \min\left\{1; \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} - 1\right\}\right)$ und $N_0(\varepsilon) := n_0(\delta_\varepsilon)$.
Für alle $\varepsilon \in (0;1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_0(\varepsilon)$ folgt

$$\left|\frac{p_n}{n \cdot \ln(n)} - 1\right| \leq \frac{2\delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2}{(1+\delta_\varepsilon)^2} = 1 - \frac{1}{(1+\delta_\varepsilon)^2} < 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} - 1\right)^2} = \varepsilon.$$

Aufgabe 66 (Größenordnung von ω)
Sei $\omega : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & \omega(n) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ teilt } n\} \end{array}\right\}$.

a) Zeigen Sie

$$\#\left\{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \,\middle|\, \omega(n) > (1-\varepsilon) \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right\} = \infty$$

für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$!

b) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ mit

$$\omega(n) \leq (1+\varepsilon) \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon)$ existiert!

Tipp: Zahlen mit „besonders großem“ ω–Wert sind die Produkte aller Primzahlen, die kleiner als eine positive reelle Zahl sind.

Lösung:

Sei $\vartheta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \vartheta(x) := \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor x\rfloor} \ln(p) \end{array}\right\}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt nach dem Satz von Чебышёв†

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor x\rfloor} \ln(p) = \sum_{\substack{(p,a)^T\in\mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^a\leq x}} \ln(p) - \sum_{\substack{(p,a)^T\in\mathbb{P}\times\mathbb{N} \\ p^a\leq x \text{ und } a\neq 1}} \ln(p) = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} \Lambda(n) - \sum_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} \ln(p) \cdot \sum_{a=2}^{\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right\rfloor} 1$$

$$= \psi(x) + O\left(\ln(x) \cdot \sum_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} 1\right) = \psi(x) + O\left(\ln(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})}\right) = \psi(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Insbesondere folgt mit dem Primzahlsatz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Sei $n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & n_x := \prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor x\rfloor} p \end{array}\right\}$. Dann folgt $\omega(n_x) = \pi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Nach dem Primzahlsatz gibt es also für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ ein $x_1(\delta) \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1(\delta) > 1$ und

$$\frac{x}{\ln(x)} \cdot (1-\delta) \leq \omega(n_x) \leq \frac{x}{\ln(x)} \cdot (1+\delta)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_1(\delta)$.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$ gibt es für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ ein $x_2(\delta) \in \mathbb{R}^+$ mit $x_2(\delta) \geq 2$ und

$$x \cdot (1-\delta) \leq \ln(n_x) = \ln\left(\prod_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor x\rfloor} p\right) = \sum_{\substack{p=1 \\ p\in\mathbb{P}}}^{\lfloor x\rfloor} \ln(p) = \vartheta(x) \leq x \cdot (1+\delta).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_2(\delta)$.

Für alle $\delta \in (0;1)$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_2(\delta)$ folgt

$$\ln(x) + \ln(1-\delta) \leq \ln(\ln(n_x)) \leq \ln(x) + \ln(1+\delta).$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} n_x = \infty$ gibt es für alle $\delta \in (0;1)$ ein $x_3(\delta) \in \mathbb{R}^+$ mit $x_3(\delta) \geq 3$ und

$$\ln(\ln(n_x)) - \ln(1-\delta) \leq \ln(\ln(n_x)) \cdot (1+\delta)$$

und

$$\ln(\ln(n_x)) \cdot (1-\delta) \leq \ln(\ln(n_x)) - \ln(1+\delta)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_3(\delta)$.

†sprich: „Chebyshev“

a) Für alle $\delta \in (0;1)$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq \max\{x_1(\delta); x_2(\delta); x_3(\delta)\}$ folgt

$$\begin{aligned}\omega(n_x) &\geq \frac{x}{\ln(x)} \cdot (1-\delta) \geq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x)) - \ln(1-\delta)} \cdot \frac{1-\delta}{1+\delta} \\ &\geq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \frac{1-\delta}{(1+\delta)^2} = \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \left(1 - \frac{3\delta+\delta^2}{(1+\delta)^2}\right).\end{aligned}$$

Wähle für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta_\varepsilon \in (0;1)$ mit

$$\tfrac{3\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon^2}{(1+\delta_\varepsilon)^2} < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad x_0(\varepsilon) := \max\{x_1(\delta_\varepsilon); x_2(\delta_\varepsilon); x_3(\delta_\varepsilon)\}.$$

Dann gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_0(\varepsilon)$

$$\omega(n_x) \geq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \left(1 - \frac{3\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon^2}{(1+\delta_\varepsilon)^2}\right) > \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot (1-\varepsilon).$$

b) Für alle $\delta \in (0;1)$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq \max\{x_1(\delta); x_2(\delta); x_3(\delta)\}$ folgt

$$\begin{aligned}\omega(n_x) &\leq \frac{x}{\ln(x)} \cdot (1+\delta) \leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x)) - \ln(1+\delta)} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} \\ &\leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \frac{1+\delta}{(1-\delta)^2} = \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \left(1 + \frac{3\delta-\delta^2}{(1-\delta)^2}\right).\end{aligned}$$

Wähle für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta_\varepsilon \in (0;1)$ mit

$$\tfrac{3\delta_\varepsilon-\delta_\varepsilon^2}{(1-\delta_\varepsilon)^2} < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad x_0(\varepsilon) := \max\{x_1(\delta_\varepsilon); x_2(\delta_\varepsilon); x_3(\delta_\varepsilon)\}.$$

Dann gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq x_0(\varepsilon)$

$$\omega(n_x) \leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot \left(1 - \frac{3\delta_\varepsilon-\delta_\varepsilon^2}{(1-\delta_\varepsilon)^2}\right) \leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(\ln(n_x))} \cdot (1+\varepsilon).$$

Wegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x\cdot\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} (\ln(x)) = \infty$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))}\right) = \frac{\frac{\ln(\ln(x))}{x} - \frac{\ln(x)}{x\cdot\ln(x)}}{(\ln(\ln(x)))^2} = \frac{\ln(\ln(x)) - 1}{x\cdot(\ln(\ln(x)))^2} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x > \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1;2\}$ mit

$$\frac{\ln(y)}{\ln(\ln(y))} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 3$ und alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x \geq \max\{y; n_0\}$.

Sei nun $y : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^+ \\ m & \mapsto & y_m \end{array}\right\}$ derart, dass $\omega(m) = \pi(y_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist.

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$n_x = \min\{m \in \mathbb{N} | \, \omega(m) = \pi(x)\}.$$

Damit folgt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \max\{n_0; n_{x_0(\varepsilon)}\}$

$$\begin{aligned}\omega(m) &= \pi(y_m) \leq \pi(\max\{y_m; x_0(\varepsilon)\}) = \omega\left(n_{\max\{y_m, x_0(\varepsilon)\}}\right) \\ &\leq \frac{\ln\left(n_{\max\{y_m, x_0(\varepsilon)\}}\right)}{\ln\left(\ln\left(n_{\max\{y_m, x_0(\varepsilon)\}}\right)\right)} \cdot (1+\varepsilon) \leq \frac{\ln(m)}{\ln(\ln(m))} \cdot (1+\varepsilon).\end{aligned}$$