Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

8. Übungsblatt — Musterlösung

09. Dezember 2009

Aufgabe 67 (Die Größenordnung von $\psi - \mathrm{id}$ und ζ–Nullstellen)
Zeigen Sie

$$\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \, \zeta(\varrho) = 0\} \subseteq \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) \leq \alpha\}$$

für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit

$$\psi(x) - x = O(x^\alpha)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$!
Tipp: Untersuchen Sie die analytische Fortsetzbarkeit von $\frac{\zeta'}{\zeta}$ mit Hilfe von Aufgabe 52!

Lösung:

Nach dem Primzahlsatz ist $\psi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \Lambda(n) = O(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ und mit Aufgabe 52 und Beispiel 7.5 (ii) folgt

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \cdot \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$.
Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt also

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= s \cdot \int_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t + s \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^s} \, \mathrm{d}t = s \cdot \int_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t + \left[\frac{s}{s-1} \cdot \frac{1}{t^{s-1}}\right]_{t=1}^{t=\infty} \\ &= \frac{s}{s-1} + s \cdot \int_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit $\psi(x) - x = O(x^\alpha)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t$ absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ wegen

$$\int_1^\infty \left|\frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}}\right| \mathrm{d}t \leq C \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^{\operatorname{Re}(s)+1-\alpha}} \, \mathrm{d}t = C \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{Re}(s) - \alpha} \cdot \frac{1}{t^{\operatorname{Re}(s)-\alpha}}\right]_{t=1}^{\infty} = \frac{C}{\operatorname{Re}(s) - \alpha}.$$

mit einem $C \in \mathbb{R}^+$.
Also ist $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{s}{s-1} \end{array} \right\}$ für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit $\psi(x) - x = O(x^\alpha)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ auf $\{s \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$ holomorph fortsetzbar und damit folgt, dass ζ auf $\{s \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$ keine Nullstellen haben kann.

Aufgabe 68 (ζ–Nullstellen und die Größenordnung von $\psi - \mathrm{id}$)
Für alle $T \in \mathbb{R}$ mit $T \geq 1$ gilt

$$\#\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \, \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } T < |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T+1\} = O(\ln(T+4)).$$

Außerdem ist $\#\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \, \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq 1\}$ eine absolute Konstante.
Zeigen Sie

$$\psi(x) - x = O\left(x^{\alpha} \cdot \ln^2(x)\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ und alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit

$$\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} | \, \zeta(\varrho) = 0\} \subseteq \{s \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}(s) \leq \alpha\} \quad !$$

Tipp: Verwenden Sie die explizite Formel!

Lösung:
Wegen $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ist $\zeta \neq 0$. Damit gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|s| < \varepsilon$ ist, da Nullstellen holomorpher Funktionen diskret liegen.
Sei $\mathcal{N} := \{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | \, \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(\varrho) \geq 0\}$.
Nach der expliziten Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$ und alle $T \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq T \leq x$

$$\psi(x) - x = \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T}} \frac{x^{\varrho} - 1}{\varrho} + O\left(\frac{x}{T} \cdot \ln^2(x)\right).$$

Für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit $\mathcal{N} \subseteq \{s \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}(s) \leq \alpha\}$, alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $T \in \mathbb{R}$ mit $T \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T}} \frac{x^{\varrho} - 1}{\varrho} \right| &\leq \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T}} \left| \frac{x^{\varrho} - 1}{\varrho} \right| \leq \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T}} \frac{x^{\mathrm{Re}(\varrho)} + 1}{|\varrho|} \\
&\leq \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq 1}} \frac{x^{\mathrm{Re}(\varrho)} + 1}{|\varrho|} + \sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ n < |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq n+1}} \frac{x^{\mathrm{Re}(\varrho)} + 1}{|\varrho|} \\
&\leq \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq 1}} \frac{x^{\alpha} + 1}{\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ n < |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq n+1}} \frac{x^{\alpha} + 1}{n} \\
&= (x^{\alpha} + 1) \cdot \frac{\#\{\varrho \in \mathcal{N} | \, |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq 1\}}{\varepsilon} \\
&\quad + (x^{\alpha} + 1) \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{\#\{\varrho \in \mathcal{N} | \, n < |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq n+1\}}{n}.
\end{aligned}$$

Nun gibt es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{\#\{\varrho \in \mathcal{N} | \, n < |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq n+1\}}{n} &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{C \cdot \ln(n+4)}{n} \leq C \cdot \ln(\lfloor T \rfloor + 4) \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor T \rfloor} \frac{1}{n} \\
&\leq C \cdot \ln(\lfloor T \rfloor + 4) \cdot \ln(\mathrm{e} \lfloor T \rfloor)
\end{aligned}$$

für alle $T \in \mathbb{R}$ mit $T \geq 1$.

Wegen der Endlichkeit von $\{\varrho \in \mathcal{N} | \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq 1\}$ folgt also

$$\sum_{\substack{\varrho \in \mathcal{N} \\ |\mathrm{Im}(\varrho)| \leq T}} \frac{x^{\varrho} - 1}{\varrho} = O(x^{\alpha}) + O\left(x^{\alpha} \cdot \ln^2(T)\right).$$

für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit $\mathcal{N} \subseteq \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) \leq \alpha\}$, alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $T \in \mathbb{R}$ mit $T \geq 1$.
Die Wahl $T := x^{1-\alpha}$ liefert für alle $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ mit $\mathcal{N} \subseteq \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) \leq \alpha\}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$

$$\psi(x) - x = O\left(x^{\alpha} \cdot \ln^2(x)\right).$$

Aufgabe 69 (Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$)

a) Leiten Sie auf der Annahme der Rationalität von $\sqrt{2}$ her, dass es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist und geben Sie an, wie hieraus ein Widerspruch entsteht!

b) Lässt sich die Beweisführung auf $\sqrt[k]{m}$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \left\{n^k \in \mathbb{N} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ verallgemeinern? Wenn ja, wie?

Lösung:

a) Annahme: Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ und $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$q \cdot \sqrt{2}^{2\ell} = q \cdot \left(\sqrt{2}^2\right)^{\ell} = q \cdot 2^{\ell} \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad q \cdot \sqrt{2}^{2\ell+1} = q \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}^2\right)^{\ell} = q \cdot \tfrac{p}{q} \cdot 2^{\ell} = p \cdot 2^{\ell} \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n &= q \cdot \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \cdot \sqrt{2}^h \cdot (-1)^{n-h} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\ell} \cdot q \cdot \sqrt{2}^{2\ell} \cdot (-1)^{n-2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} \cdot q \cdot \sqrt{2}^{2\ell+1} \cdot (-1)^{n-(2\ell+1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\ell} \cdot q \cdot 2^{\ell} \cdot (-1)^{n-2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} \cdot p \cdot 2^{\ell} \cdot (-1)^{n-2\ell-1}. \end{aligned}$$

Da in den beiden Summen alle Summanden ganze Zahlen sind, ist also $q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sqrt{2} \neq 1$ und $q \in \mathbb{N}$ ist $q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere ist $\left|q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit folgt

$$\liminf_{n \to \infty} \left|q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right| \geq 1.$$

Wegen $0 \leq \left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1 < 1$ gilt aber im Widerspruch dazu

$$\lim_{n \to \infty} \left|q \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right| = \lim_{n \to \infty} q \cdot \left|\sqrt{2} - 1\right|^n = q \cdot \lim_{n \to \infty} \left|\sqrt{2} - 1\right|^n = 0.$$