Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

10. Übungsblatt

13. Januar 2010

Aufgabe 70 (Ein Irrationalitätskriterium)

a) Zeigen Sie für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} \neq \frac{s}{t}$ die Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{s}{t}\right| \geq \frac{1}{qt} \quad !$$

b) Zeigen Sie die Irrationalität von $\alpha \in \mathbb{R}$, falls es eine Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$, eine Folge $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & p_n \end{array} \right\}$ und eine Folge $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & q_n \end{array} \right\}$ mit $(p_n, q_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(q_n)}{q_n} = \infty$ und

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{f(q_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt!}$$

c) Können Sie mit diesem Kriterium zeigen, dass e irrational ist? Wenn ja, wie?

Aufgabe 71 (Satz von Gelfond–Schneider)
Der Satz von Gelfond–Schneider besagt, dass für $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ die Zahl $\alpha^\beta := \mathrm{e}^{\beta \cdot \log(\alpha)}$ transzendent ist, wobei $\log(\alpha)$ eine Zahl ist, die in die Exponentialfunktion eingesetzt den Wert α liefert und mit $\mathbb{A}$ die Menge der algebraischen Zahlen bezeichnet wird.

a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{14}^{\sqrt{35}}$, e^π und $\mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}} = \left\lfloor \mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}} \right\rfloor + 1 - 0{,}000\,000\,000\,07\ldots$ transzendent sind!

b) Zeigen Sie die Äquivalenz des Satzes von Gelfond–Schneider zur folgenden Aussage!
Von den Zahlen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0;1\}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ und α^β ist mindestens eine transzendent.

c) Seien $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$ derart, dass $c \cdot \log(\alpha) + d \cdot \log(\beta) \neq 0$ für alle $(c,d)^T \in \mathbb{Q}^2 \setminus \left\{(0,0)^T\right\}$ ist.

Zeigen Sie für alle $(\gamma,\delta)^T \in \mathbb{A}^2 \setminus \left\{(0,0)^T\right\}$

$$\gamma \cdot \log(\alpha) + \delta \cdot \log(\beta) \neq 0 \quad !$$

Aufgabe 72 (Die Menge der Liouville–Zahlen)
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{L} := \{\alpha \in \mathbb{R} | \, \alpha \text{ ist eine Liouville–Zahl}\}$ eine überabzählbare Menge mit Lebesgue–Maß 0 ist!
Tipp: Für die Überabzählbarkeit variieren Sie das Beispiel aus der Vorlesung, indem Sie im Exponenten eine monoton wachsende Folge multiplizieren!
Für die Maß–Eigenschaft hilft es, zunächst $\mathbb{L} \cap (-m; m)$ mit $m \in \mathbb{N}$ zu betrachten.