**Albert–Ludwigs–Universität Freiburg**
**Institut für Mathematik**
**Abteilung für Reine Mathematik**
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

# Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

## 10. Übungsblatt — Musterlösung

13. Januar 2010

**Aufgabe 70** (Ein Irrationalitätskriterium)

**a)** Zeigen Sie für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} \neq \frac{s}{t}$ die Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{s}{t}\right| \geq \frac{1}{qt} \quad !$$

**b)** Zeigen Sie die Irrationalität von $\alpha \in \mathbb{R}$, falls es eine Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$, eine Folge $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & p_n \end{array} \right\}$ und eine Folge $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & q_n \end{array} \right\}$ mit $(p_n, q_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(q_n)}{q_n} = \infty$ und

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{f(q_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gibt!}$$

**c)** Können Sie mit diesem Kriterium zeigen, dass e irrational ist? Wenn ja, wie?

**Lösung:**

**a)** Seien $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} \neq \frac{s}{t}$.
Dann gilt

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{s}{t}\right| = \left|\frac{pt - qs}{qt}\right| = \frac{|pt - qs|}{qt},$$

was $pt - qs \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liefert.
Damit folgt

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{s}{t}\right| = \frac{|pt - qs|}{qt} \geq \frac{1}{qt}.$$

**b)** Seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$, $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & p_n \end{array} \right\}$ und $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & q_n \end{array} \right\}$ mit $(p_n, q_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(q_n)}{q_n} = \infty$ und

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{f(q_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Annahme: $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{Z}$ und ein $t \in \mathbb{N}$ mit $(s,t) = 1$ und $\alpha = \frac{s}{t}$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(q_n)}{q_n} = \infty$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $f(q_n) > tq_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p_m}{q_m} = \alpha$. Dann gilt $sq_m = tp_m$ wegen $\alpha = \frac{s}{t}$.

Also ist $t$ ein Teiler von $sq_m$ und $q_m$ ist ein Teiler von $tp_m$.

Wegen $(s,t) = 1$ teilt $t$ also $q_m$ und wegen $(p_m, q_m) = 1$ teilt $q_m$ also $t$. Damit folgt $q_m = t$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ gibt es deshalb ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_2$.

Sei $n_0 := \max\{n_1; n_2\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sind $\frac{s}{t} \neq \frac{p_n}{q_n}$ und $f(q_n) > tq_n$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ folgt mit Aufgabenteil a) der Widerspruch

$$\frac{1}{f(q_n)} < \frac{1}{tq_n} \leq \left|\frac{s}{t} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{f(q_n)}.$$

**c)** Nein.

**Aufgabe 71** (Satz von Gelfond–Schneider)
Der Satz von Gelfond–Schneider besagt, dass für $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ die Zahl $\alpha^\beta := \mathrm{e}^{\beta \cdot \log(\alpha)}$ transzendent ist, wobei $\log(\alpha)$ eine Zahl ist, die in die Exponentialfunktion eingesetzt den Wert $\alpha$ liefert und mit $\mathbb{A}$ die Menge der algebraischen Zahlen bezeichnet wird.

**a)** Zeigen Sie, dass $\sqrt{14}^{\sqrt{35}}$, $\mathrm{e}^\pi$ und $\mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}} = \left\lfloor \mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}} \right\rfloor + 1 - 0{,}000\,000\,000\,07\ldots$ transzendent sind!

**b)** Zeigen Sie die Äquivalenz des Satzes von Gelfond–Schneider zur folgenden Aussage!
Von den Zahlen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0;1\}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ und $\alpha^\beta$ ist mindestens eine transzendent.

**c)** Seien $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$ derart, dass $c \cdot \log(\alpha) + d \cdot \log(\beta) \neq 0$ für alle $(c,d)^T \in \mathbb{Q}^2 \setminus \left\{(0,0)^T\right\}$ ist.

Zeigen Sie für alle $(\gamma,\delta)^T \in \mathbb{A}^2 \setminus \left\{(0,0)^T\right\}$

$$\gamma \cdot \log(\alpha) + \delta \cdot \log(\beta) \neq 0 \quad !$$

**Lösung:**

**a)** Nach Aufgabe 69 b) sind $\sqrt{14} = \sqrt[2]{2\cdot 7} \notin \mathbb{Q}$ und $\sqrt{35} = \sqrt[2]{5\cdot 7} \notin \mathbb{Q}$.

Wegen $\sqrt{14}^2 - 14 = 0$ und $\sqrt{35}^2 - 35 = 0$ sind $\sqrt{14} \in \mathbb{A}$ und $\sqrt{35} \in \mathbb{A}$. Trivialerweise gilt $0 < 1 = \sqrt{1} < \sqrt{14}$, also $0 \neq \sqrt{14} \neq 1$.

Mit dem Satz von Gelfond–Schneider folgt die Transzendenz von $\sqrt{14}^{\sqrt{35}}$.

Es ist $\mathrm{e}^\pi = \mathrm{e}^{(-\mathrm{i})\cdot\pi\cdot\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\pi}\right)^{\mathrm{i}} = (-1)^{\mathrm{i}}$.

Wegen $-1 < 0 < 1$ und $(-1) + 1 = 0$ ist $-1 \in \mathbb{A} \setminus \{0;1\}$.

Da $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$ ist, gilt $\mathrm{i} \in \mathbb{A}$. Wegen $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ ist $\mathrm{i} \notin \mathbb{Q}$.

Mit dem Satz von Gelfond–Schneider folgt die Transzendenz von $\mathrm{e}^\pi$.

Es ist $\mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}} = \mathrm{e}^{(-\mathrm{i})\cdot\pi\cdot\mathrm{i}\cdot\sqrt{163}} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\pi}\right)^{\mathrm{i}\cdot\sqrt{163}} = (-1)^{\mathrm{i}\cdot\sqrt{163}}$.

Wegen $-1 < 0 < 1$ und $(-1) + 1 = 0$ ist $-1 \in \mathbb{A} \setminus \{0; 1\}$.

Da $\left(\mathrm{i} \cdot \sqrt{163}\right)^2 + 163 = 0$ ist, gilt $\mathrm{i} \cdot \sqrt{163} \in \mathbb{A}$.

Wegen $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ und $\sqrt{163} \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{i} \cdot \sqrt{163} \notin \mathbb{R}$ und damit auch $\mathrm{i} \cdot \sqrt{163} \notin \mathbb{Q}$.

Mit dem Satz von Gelfond–Schneider folgt die Transzendenz von $\mathrm{e}^{\pi\cdot\sqrt{163}}$.

**b)** Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

$\Rightarrow$ Es gelte der Satz von Gelfond–Schneider.
Seien $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ und $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.
Ist $\alpha$ transzendent, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\alpha$ als algebraisch angenommen.
Ist $\beta$ transzendent, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\beta$ als algebraisch angenommen.
Da $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0; 1\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ sind, ist $\alpha^\beta$ nach dem Satz von Gelfond–Schneider transzendent.

$\Leftarrow$ Es gelte die Aussage aus der Aufgabenstellung.
Seien $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0; 1\}$ und $\beta \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$.
Da $\alpha$ und $\beta$ nicht transzendent sind, muss also $\alpha^\beta$ transzendent sein.

**c)** Annahme: Es gibt ein $(\gamma, \delta)^T \in \mathbb{A} \setminus \left\{(0, 0)^T\right\}$ mit $\gamma \cdot \log(\alpha) + \delta \cdot \log(\beta) = 0$.

Ist $\gamma = 0$, so ist $\delta \neq 0$, es folgt $\delta \cdot \log(\beta) = 0$ und wegen $\delta \neq 0$ ergibt sich $\log(\beta) = 0$.

Aus $\gamma = 0$ folgt also $0 \cdot \log(\alpha) + 1 \cdot \log(\beta) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es werde nun $\gamma \neq 0$ vorausgesetzt.

Dann folgt

$$\log(\alpha) = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot \log(\beta).$$

Dabei ist $\frac{\delta}{\gamma} \notin \mathbb{Q}$, da sonst $1 \cdot \log(\alpha) + \frac{\delta}{\gamma} \cdot \log(\beta) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung stünde.

Da $\mathbb{A}$ ein Körper ist, gilt $-\frac{\delta}{\gamma} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$.

Es ist

$$\beta^{-\frac{\delta}{\gamma}} = \left(\mathrm{e}^{\log(\beta)}\right)^{-\frac{\delta}{\gamma}} = \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{\gamma}\cdot\log(\beta)} = \mathrm{e}^{\log(\alpha)} = \alpha.$$

Wegen $\beta \in \mathbb{A} \setminus \{0; 1\}$ ist also nach dem Satz von Gelfond–Schneider $\alpha$ transzendent im Widerspruch zu $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

**Aufgabe 72** (Die Menge der LIOUVILLE–Zahlen)
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{L} := \{\alpha \in \mathbb{R} |\, \alpha \text{ ist eine LIOUVILLE–Zahl}\}$ eine überabzählbare Menge mit LEBESGUE–Maß 0 ist!
*Tipp:* Für die Überabzählbarkeit variieren Sie das Beispiel aus der Vorlesung, indem Sie im Exponenten eine monoton wachsende Folge multiplizieren!
Für die Maß–Eigenschaft hilft es, zunächst $\mathbb{L} \cap (-m; m)$ mit $m \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

**Lösung:**

- Es gibt überabzählbar viele monoton steigende Folgen in $\mathbb{N}$.

  Annahme: Es gibt nur abzählbar viele monoton steigende Folgen mit natürlichen Folgengliedern.

  Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ sei $f_\ell : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & f_\ell(n) \end{array} \right\}$ monoton steigend derart, dass $f_\ell \neq f_j$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \neq \ell$ und

  $$\{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} |\, g \text{ ist monoton steigend}\} = \{f_\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N} |\, \ell \in \mathbb{N}\}$$

  sind. Definiere $f(1) := f_1(1) + 1$ und setze dann $f(n) := \max\{f(n-1); f_n(n) + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Die Folge $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & f(n) \end{array} \right\}$ ist monoton steigend und unterscheidet sich für alle $\ell \in \mathbb{N}$ wegen $f(\ell) \geq f_\ell(\ell) + 1$ von $f_\ell$.

  Dies ist ein Widerspruch zur Wahl der $f_\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$.

- Jede monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$ liefert eine LIOUVILLE–Zahl.

  Seien $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & g_n \end{array} \right\}$ monoton steigend und $\alpha_g := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{g_j \cdot j!}}$.

  Seien $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & k_n := 2^{g_n \cdot n!} \end{array} \right\}$ und $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & b_n := k_n \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{g_j \cdot j!}} \end{array} \right\}$.

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

  $$b_n = k_n \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{g_j \cdot j!}} = 2^{g_n \cdot n!} \cdot \left( \frac{1}{2^{g_n \cdot n!}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{g_j \cdot j!}} \right) = 1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} 2^{g_n \cdot n! - g_j \cdot j!}$$

  ungerade und damit teilerfremd zu $k_n$, da die Exponenten der Summanden der letzten Summe wegen der Monotonie von $g$ und ! nicht–negative ganze Zahlen sind.

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

  $$\begin{aligned} \left| \alpha_g - \frac{b_n}{k_n} \right| &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{g_j \cdot j!}} = \frac{1}{2^{g_{n+1} \cdot (n+1)!}} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{g_j \cdot j! - g_{n+1} \cdot (n+1)!}} \\ &\leq \frac{1}{2^{g_{n+1} \cdot (n+1)!}} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{g_j \cdot (j! - (n+1)!)}} \leq \frac{1}{2^{g_n \cdot n! \cdot (n+1)}} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j! - (n+1)!}} \\ &\leq \frac{1}{2^{g_n \cdot n! \cdot n + g_n \cdot n!}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2^{-g_n \cdot n!}}{\left(2^{g_n \cdot n!}\right)^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{-g_n \cdot n! + 1}}{k_n^n}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-g_n \cdot n!+1} = 0$ ist $\alpha_g \in \mathbb{L}$.

Da es überabzählbar viele monoton steigende Folgen mit natürlichen Folgengliedern gibt und die $\alpha$–Werte zweier verschiedener Folgen unterschiedlich sind, gibt es überabzählbar viele LIOUVILLE–Zahlen.

- Das LEBESGUE–Maß von $\mathbb{L}$

  Für alle $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{q,n,m} := \bigcup\limits_{p=-qm}^{qm} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}; \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)$.

  Dann gilt $\mathbb{L} \cap (-m; m) \subseteq \bigcup\limits_{q=2}^{\infty} \mathcal{A}_{q,n,m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

  $\lambda$ bezeichne das LEBESGUE–Maß. Für alle $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist

$$\lambda\left(\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}; \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) - \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{2}{q^n}.$$

  Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ folgt aus der Theorie der RIEMANN'schen Untersummen

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\mathbb{L} \cap (-m; m)\right) &\leq \lambda\left(\bigcup_{q=2}^{\infty} \mathcal{A}_{q,n,m}\right) \leq \sum_{q=2}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{p=-qm}^{qm} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}; \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)\right) \\
&\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-qm}^{qm} \lambda\left(\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}; \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)\right) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-qm}^{qm} \frac{2}{q^n} \\
&= \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2}{q^n} \cdot (qm - (-qm) + 1) = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{4qm+2}{q^n} \\
&\leq (4m+2) \cdot \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \leq (4m+2) \cdot \int_1^{\infty} q^{-n+1}\,\mathrm{d}q \\
&= (4m+2) \cdot \left[\frac{q^{-n+2}}{-n+2}\right]_{q=1}^{q=\infty} = \frac{4m+2}{n-2}.
\end{aligned}$$

  Also existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_m(\varepsilon) \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$, so dass

$$\lambda\left(\mathbb{L} \cap (-m; m)\right) \leq \frac{4m+2}{n-2} < \varepsilon$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_m(\varepsilon)$ ist.

  Deshalb ist $\mathbb{L} \cap (-m; m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge.

  Damit ist auch $\mathbb{L} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left(\mathbb{L} \cap (-m; m)\right)$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge.