Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

11. Übungsblatt

20. Januar 2010

Aufgabe 73 (Ägyptische Stammbrüche)
Ein Bruch der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt **ägyptischer Stammbruch**, da die alten Ägypter die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als Summe verschiedener solcher Brüche darstellten. Fibonacci wird der erste Beweis der folgenden Aussage zugeschrieben:
„Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ gibt es ein $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, so dass $n_j < n_\ell$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $j < \ell \leq k$ gilt und

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \qquad \text{ist.“}$$

Fibonacci gab den folgenden Algorithmus an:
Sind $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$, so stoppe man, falls $\frac{q}{p} \in \mathbb{N}$ ist, und setze andernfalls $n := \min\left\{m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{m} < \frac{p}{q}\right\}$. Danach verfahre man genauso mit $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$.

a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht!

b) Führen Sie den Algorithmus für $\frac{5}{121}$ durch!

c) Finden Sie eine andere Darstellung von $\frac{5}{121}$ als Summe ägyptischer Stammbrüche?

Aufgabe 74 (Wallis–Produkt für π)
Seien

$$I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & I_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} \qquad \text{und} \qquad a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n := \prod\limits_{\ell=1}^{n} \frac{4\ell^2}{4\ell^2 - 1} \end{array} \right\}.$$

John Wallis zeigte 1655

$$\pi = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots .$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell - 1}{2\ell} \qquad \text{und} \qquad I_{2n+1} = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell}{2\ell + 1} \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\pi = 2a_n \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \quad !$$

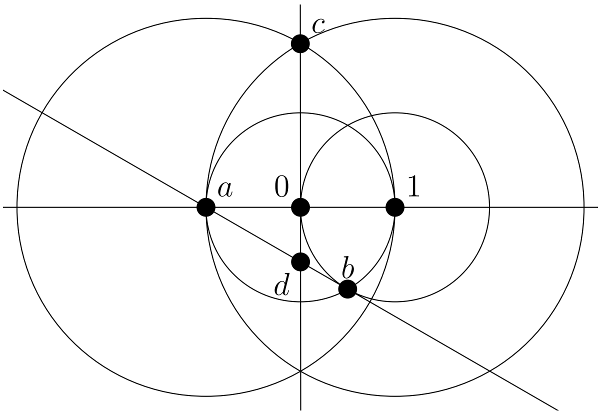
c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}, \qquad \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n} \qquad \text{und} \qquad 0 < \pi - 2a_n < \frac{\pi}{2n} \quad !$$

bitte wenden

Aufgabe 75 (Graphische Näherungen an π)

a) Der polnische Mönch Kochansky gab 1685 die folgende Näherungskonstuktion an π aus 0 und 1 an:

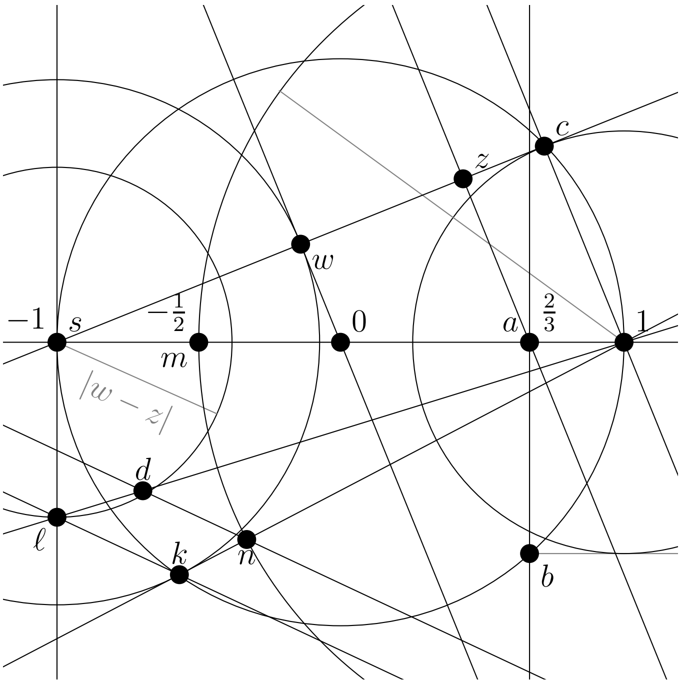


Die Kreis um 0 durch 1 schneidet die Gerade durch 0 und 1 in $a := -1$ und den Kreis um 1 durch 0 in b.
Der Kreis um a durch 1 und der Kreis um 1 durch a schneiden sich in c.
Die Gerade durch 0 und c schneidet die Gerade durch a und b in d.

Berechnen Sie $|2 - \mathrm{i} \cdot (3 - |d|)|$!

Geben Sie einen auf acht Dezimalstellen gerundeten Näherungswert an!

b) Ramanujan gab 1913 die folgende Näherungskonstuktion an π aus 0 und 1 an:



$a := \frac{2}{3}$ ist konstruierbar.
Die Senkrechte durch a zur Geraden (G) durch 0 und 1 schneidet den Kreis (K) um 0 durch 1 in b.
Der Kreis um 1 mit dem Radius $|b - a|$ schneidet (K) in c.
$s := -1$ ist konstruierbar.
Die Parallele durch 0 zur Geraden durch 1 und c schneidet die Gerade durch s und c in w.
Die Parallele durch a zur Geraden durch 1 und c schneidet die Gerade durch s und c in z.
Der Kreis um s durch w schneidet (K) in k. Der Kreis um s mit dem Radius $|w - z|$ schneidet die Senkrechte zu (G) durch s in ℓ.
$m := -\frac{1}{2}$ ist konstruierbar.
Der Kreis um 1 durch m schneidet die Gerade durch 1 und k in n.
Die Parallele durch n zur Geraden durch k und ℓ schneidet die Gerade durch 1 und ℓ in d.

Berechnen Sie $|d - 1|^2$!

Geben Sie einen auf acht Dezimalstellen gerundeten Näherungswert an!