Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

11. Übungsblatt — Musterlösung

20. Januar 2010

Aufgabe 73 (Ägyptische Stammbrüche)
Ein Bruch der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt **ägyptischer Stammbruch**, da die alten Ägypter die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als Summe verschiedener solcher Brüche darstellten.
FIBONACCI wird der erste Beweis der folgenden Aussage zugeschrieben:
„Für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ gibt es ein $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, so dass $n_j < n_\ell$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $j < \ell \leq k$ gilt und

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} \qquad \text{ist.“}$$

FIBONACCI gab den folgenden Algorithmus an:
Sind $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$, so stoppe man, falls $\frac{q}{p} \in \mathbb{N}$ ist, und setze andernfalls $n := \min\left\{m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{m} < \frac{p}{q}\right\}$. Danach verfahre man genauso mit $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$.

a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht!

b) Führen Sie den Algorithmus für $\frac{5}{121}$ durch!

c) Finden Sie eine andere Darstellung von $\frac{5}{121}$ als Summe ägyptischer Stammbrüche?

Lösung:

a) Seien $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q < p$ und $\frac{q}{p} \notin \mathbb{N}$. Sei $n := \min\left\{m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{m} < \frac{p}{q}\right\}$.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$ gilt wegen $\frac{q}{p} \notin \mathbb{N}$

$$m \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor < \frac{q}{p}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{m} > \frac{p}{q}.$$

Damit folgt $n > \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$. Ferner gilt

$$\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1 > \frac{q}{p} - 1 + 1 = \frac{q}{p}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1} < \frac{p}{q}.$$

Also ist $n = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1$. Damit folgt $0 < pn - q < p$ wegen

$$0 = p \cdot \left(\frac{q}{p} - 1 + 1\right) - q < p \cdot \left(\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1\right) - q < p \cdot \left(\frac{q}{p} + 1\right) - q = p.$$

Wegen $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn-q}{qn}$ ist also der Zähler, der sich nach Abzug eines Stammbruches in einem Iterationsschritt ergibt, stets eine kleinere natürliche Zahl als der vorhergehende Zähler.

Nach höchstens $p-1$ Iterationsschritten tritt damit der Zähler 1 auf und der Algorithmus stoppt.

b) Es ist $\frac{121}{5} = 24 + \frac{1}{5}$. Sei also $n_1 := 25$.
Es ist $\frac{5}{121} - \frac{1}{25} = \frac{125-121}{25 \cdot 121} = \frac{4}{3\,025}$. Es ist $\frac{3\,025}{4} = 756 + \frac{1}{4}$. Sei also $n_2 := 757$.
Es ist $\frac{4}{3\,025} - \frac{1}{757} = \frac{3\,028-3\,025}{3\,025 \cdot 757} = \frac{3}{2\,289\,925}$. Es ist $\frac{2\,289\,925}{3} = 763\,308 + \frac{1}{3}$. Sei also $n_3 := 763\,309$.
Es ist $\frac{3}{2\,289\,925} - \frac{1}{763\,309} = \frac{2\,289\,927-2\,289\,925}{2\,289\,925 \cdot 763\,309} = \frac{2}{1\,747\,920\,361\,825}$.
Es ist $\frac{1\,747\,920\,361\,825}{2} = 873\,960\,180\,912 + \frac{1}{2}$. Sei also $n_4 := 873\,960\,180\,913$.
Es ist $\frac{2}{1\,747\,920\,361\,825} - \frac{1}{873\,960\,180\,913} = \frac{1\,747\,920\,361\,826-1\,747\,920\,361\,825}{1\,747\,920\,361\,825 \cdot 873\,960\,180\,913} = \frac{1}{1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225}$.
Sei also $n_5 := 1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225$. Damit folgt

$$\frac{5}{121} = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{n_j} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763\,309} + \frac{1}{873\,960\,180\,913} + \frac{1}{1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225}.$$

c) Es ist $\dfrac{1}{33} + \dfrac{1}{121} + \dfrac{1}{363} = \dfrac{11}{363} + \dfrac{3}{363} + \dfrac{1}{363} = \dfrac{15}{363} = \dfrac{5}{121}$.

Aufgabe 74 (Wallis–Produkt für π)
Seien

$$I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} \qquad \text{und} \qquad a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n := \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} \frac{4\ell^2}{4\ell^2-1} \end{array} \right\}.$$

John Wallis zeigte 1655

$$\pi = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots .$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell-1}{2\ell} \qquad \text{und} \qquad I_{2n+1} = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell}{2\ell+1} \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\pi = 2a_n \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \quad !$$

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}, \qquad \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n} \qquad \text{und} \qquad 0 < \pi - 2a_n < \frac{\pi}{2n} \quad !$$

Lösung:

a) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ folgt aus partieller Summation

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\sin^{n-1}(x) \cdot (-\cos(x))\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((n-1) \cdot \sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x)\big) \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= 1^{n-1} \cdot (-0) - 0^{n-1} \cdot (-1) + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot \big(1 - \sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Addiert man den hinteren Term auf beiden Seiten dazu, so ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ nach Division durch n

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

<u>Induktionsanfang:</u> Es sind

$$I_{2\cdot 0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot 0}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = [x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{0} \frac{2\ell - 1}{2\ell}$$

und

$$I_{2\cdot 0+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot 0+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = -0 - (-1) = 1 = \prod_{\ell=1}^{0} \frac{2\ell}{2\ell+1}.$$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$I_{2\cdot(n-1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{2\ell - 1}{2\ell} \qquad \text{und} \qquad I_{2\cdot(n-1)+1} = \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{2\ell}{2\ell+1}.$$

<u>Induktionsschluss:</u> Dann gilt $2 \leq 2n < 2n+1$ und mit der partiellen Integration folgt

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2\cdot(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{2\ell-1}{2\ell} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell-1}{2\ell}$$

und

$$I_{2n+1} = \frac{2n+1-1}{2n+1} \cdot I_{2n+1-2} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2\cdot(n-1)+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{2\ell}{2\ell+1} = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell}{2\ell+1}.$$

b) Mit Aufgabenteil a) folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod\limits_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell-1}{2\ell}}{\prod\limits_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell}{2\ell+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(2\ell-1)\cdot(2\ell+1)}{2\ell \cdot 2\ell} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{4\ell^2-1}{4\ell^2} = \frac{\pi}{2a_n}.$$

Multipliziert man für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beide Seiten mit $2a_n$, so erhält man die Behauptung.

c) Für alle $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ist $0 < \sin(x) < 1$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$0 < \sin^n(x) < \sin^{n-1}(x)\,.$$

Dies liefert für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wegen der Stetigkeit von $\sin^n$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, \mathrm{d}x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) \, \mathrm{d}x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) \, \mathrm{d}x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x) \, \mathrm{d}x,$$

woraus folgt

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}.$$

Weiterhin gilt nach Aufgabenteil a) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{I_{2\cdot(n-1)+1}}{I_{2n+1}} = \frac{\prod\limits_{\ell=1}^{n-1} \frac{2\ell}{2\ell+1}}{\prod\limits_{\ell=1}^{n} \frac{2\ell}{2\ell+1}} = \frac{1}{\frac{2n}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Wegen $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ ist $1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ und mit $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}$ folgt

$$0 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} - 1 < \frac{1}{2n}$$

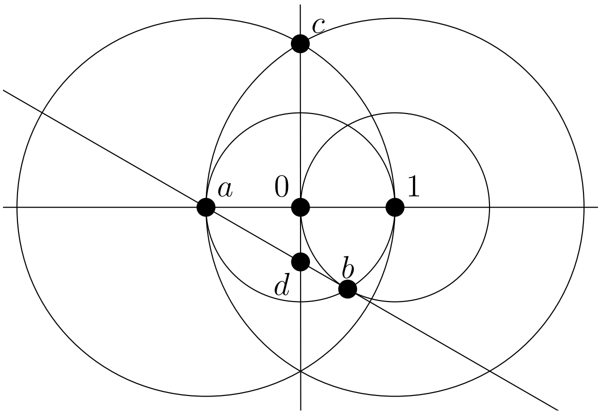
für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Aufgabenteil b) ergibt sich $\dfrac{\pi}{2a_n} = \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{\pi}{2a_n} - 1 < \frac{1}{2n} \qquad \text{bzw.} \qquad 0 < \pi - 2a_n < \frac{a_n}{n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2a_n}} < \frac{1}{2n}.$$

Aufgabe 75 (Graphische Näherungen an π)

a) Der polnische Mönch Kochansky gab 1685 die folgende Näherungskonstuktion an π aus 0 und 1 an:

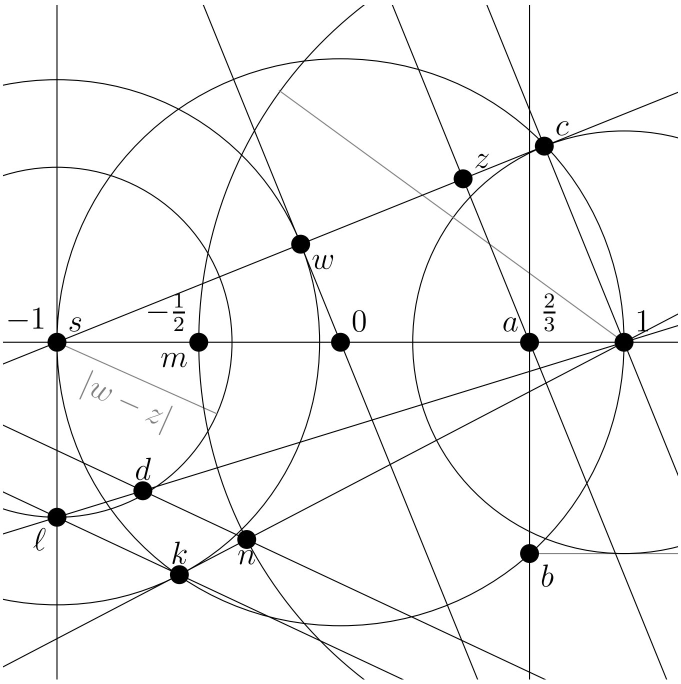


Die Kreis um 0 durch 1 schneidet die Gerade durch 0 und 1 in $a := -1$ und den Kreis um 1 durch 0 in b.
Der Kreis um a durch 1 und der Kreis um 1 durch a schneiden sich in c.
Die Gerade durch 0 und c schneidet die Gerade durch a und b in d.

Berechnen Sie $|2 - \mathrm{i} \cdot (3 - |d|)|$!

Geben Sie einen auf acht Dezimalstellen gerundeten Näherungswert an!

b) Ramanujan gab 1913 die folgende Näherungskonstuktion an π aus 0 und 1 an:



$a := \frac{2}{3}$ ist konstruierbar.
Die Senkrechte durch a zur Geraden (G) durch 0 und 1 schneidet den Kreis (K) um 0 durch 1 in b.
Der Kreis um 1 mit dem Radius $|b - a|$ schneidet (K) in c.
(K) schneidet (G) in 1 und in $s := -1$.
Die Parallele durch 0 zur Geraden durch 1 und c schneidet die Gerade durch s und c in w.
Die Parallele durch a zur Geraden durch 1 und c schneidet die Gerade durch s und c in z.
Der Kreis um s durch w schneidet (K) in k. Der Kreis um s mit dem Radius $|w - z|$ schneidet die Senkrechte zu (G) durch s in ℓ.
$m := -\frac{1}{2}$ ist konstruierbar.
Der Kreis um 1 durch m schneidet die Gerade durch 1 und k in n.
Die Parallele durch n zur Geraden durch k und ℓ schneidet die Gerade durch 1 und ℓ in d.

Berechnen Sie $|d - 1|^2$!

Geben Sie einen auf acht Dezimalstellen gerundeten Näherungswert an!

Lösung:

a) Nach dem Satz des THALES' hat das Dreieck mit den Ecken a, b und 1 bei b einen rechten Winkel von $\frac{\pi}{2}$.

Das Dreieck mit den Ecken 0, b und 1 ist wegen $|b-1| = |b-0| = |0-1|$ gleichseitig, hat also (genau wie das Dreieck mit den Ecken a, b und 1) bei 1 einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$.

Da die Winkelsumme in einem Dreieck gerade π ergibt, hat das Dreieck mit den Ecken a, b und 1 bei a einen Winkel von $\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Den selben Winkel hat das Dreieck mit den Ecken 0, a und d bei a. Dieses Dreieck ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei 0.

Damit folgt $\frac{|0-d|}{|0-a|} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Mit $|0-a| = |0-1| = 1$, $|0-d| = |d|$ und $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt also

$$|d| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Das ergibt

$$|2 - \mathrm{i}\cdot(3-|d|)| = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 + 9 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{120 - 18\cdot\sqrt{3}}}{3}.$$

Es sind

$$\frac{\sqrt{120 - 18\cdot\sqrt{3}}}{3} \approx 3,141\,533\,34 \qquad \text{und} \qquad \pi \approx 3,141\,592\,65.$$

b) Das Dreieck mit den Ecken 0, b und a ist rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei a. Nach dem Satz des PYTHAGORAS' folgt

$$|c-1| = |a-b| = \sqrt{|0-b|^2 - |0-a|^2} = \sqrt{|0-1|^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Nach dem Satz des THALES' ist das Dreieck mit den Ecken s, 1 und c ebenfalls rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei c und mit dem Satz des PYTHAGORAS' folgt

$$|s-c| = \sqrt{|1-s|^2 - |c-1|^2} = \sqrt{|1-(-1)|^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Mit den Strahlensätzen folgt

$$\frac{|s-z|}{|s-c|} = \frac{|a-s|}{|1-s|} \qquad \text{und} \qquad \frac{|s-w|}{|s-c|} = \frac{|0-s|}{|1-s|}.$$

Daraus ergibt sich

$$|s-z| = \frac{|a-s|\cdot|s-c|}{|1-s|} = \frac{\left|\frac{2}{3} - (-1)\right|\cdot\frac{\sqrt{31}}{3}}{|1-(-1)|} = \frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{31}}{3}}{2} = \frac{5\cdot\sqrt{31}}{18}$$

und

$$|s-k| = |s-w| = \frac{|0-s|\cdot|s-c|}{|1-s|} = \frac{|0-(-1)|\cdot\frac{\sqrt{31}}{3}}{|1-(-1)|} = \frac{1\cdot\frac{\sqrt{31}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{31}}{6}.$$

Da s, w und z auf einer Geraden liegen, folgt damit

$$|s-\ell| = |w-z| = |s-z| - |s-w| = \frac{5\cdot\sqrt{31}}{18} - \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{\sqrt{31}}{9}.$$

Das Dreieck mit den Ecken s, ℓ und 1 ist rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei s. Nach dem Satz des PYTHAGORAS' folgt

$$|\ell-1| = \sqrt{|s-\ell|^2+|1-s|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2+|1-(-1)|^2} = \sqrt{\frac{31}{81}+4} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

Nach dem Satz des THALES' ist das Dreieck mit den Ecken s, k und 1 ebenfalls rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei k und mit dem Satz des PYTHAGORAS' folgt

$$|k-1| = \sqrt{|1-s|^2-|s-k|^2} = \sqrt{|1-(-1)|^2-\left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \sqrt{4-\frac{31}{36}} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

Mit den Strahlensätzen folgt

$$\frac{|d-1|}{|\ell-1|} = \frac{|n-1|}{|k-1|} = \frac{|m-1|}{|k-1|}.$$

Mit $|m-1| = \left|-\frac{1}{2}-1\right| = \frac{3}{2}$ ergibt sich daraus

$$|d-1|^2 = \frac{|m-1|^2\cdot|\ell-1|^2}{|k-1|^2} = \frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{355}{81}}{\frac{113}{36}} = \frac{355\cdot 36}{113\cdot 4\cdot 9} = \frac{355}{113}.$$

Es sind

$$\frac{355}{113} \approx 3,141\,592\,92 \qquad \text{und} \qquad \pi \approx 3,141\,592\,65.$$