Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

12. Übungsblatt

27. Januar 2010

Aufgabe 76 (Die g–adische Darstellung rationaler Zahlen)
Seien $g \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ und $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & z_n \end{array} \right\}$ mit

$$z_n < g \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \#\{n \in \mathbb{N} |\, z_n \neq g-1\} = \infty.$$

Zeigen Sie, dass $a + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ genau dann rational ist, wenn z ab einer Stelle periodisch wird, das heißt, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n+\ell}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gibt!

Aufgabe 77 (Irrationalität bestimmter Zahlen)
Sei $d : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & d(n) := \min\left\{\ell \in \mathbb{N} |\, n < 10^\ell\right\} \end{array} \right\}$ die Funktion, die eine natürliche Zahl auf ihre Stellenanzahl im Dezimalsystem abbildet.

Für eine Folge $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ sei nun $D_a : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & D_a(n) := \sum\limits_{j=1}^{n} d(a_j) \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 76, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{\sum_{j=1}^{n} d(j)}} = 0{,}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\ldots$$

(also die Zahl, die entsteht, wenn man die natürlichen Zahlen hintereinander aufschreibt, ein Komma davorsetzt und vor dem Komma eine 0 platziert) irrational ist!

b) Sei $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{P} \\ n & \mapsto & p_n \end{array} \right\}$ derart, dass $p_n = \min\left(\mathbb{P} \setminus \{p_j \in \mathbb{P} |\, j \in \mathbb{N} \text{ mit } j < n\}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die aufsteigend sortierte Folge der Primzahlen.

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 76, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{10^{D_p(n)}} = 0{,}2\,3\,5\,7\,11\,13\,17\,19\,23\,29\,31\,37\,41\,43\,47\,53\,59\ldots$$

(also die Zahl, die entsteht, wenn man die Primzahlen hintereinander aufschreibt, ein Komma davorsetzt und vor dem Komma eine 0 platziert) irrational ist!

bitte wenden

Aufgabe 78 (Irrationalitätsbeweise über Kettenbrüche)
Seien $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{N}_\mathfrak{s} := \{n \in \mathbb{N} | \, n \leq \mathfrak{s}\}$.
Zu $a_0 \in \mathbb{Z}$ und der (evtl. endlichen) Folge $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{N}_\mathfrak{s} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ wird der Kettenbruch

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, (a_\mathfrak{s})] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \left(+\frac{1}{a_\mathfrak{s}}\right)}}}}$$

definiert. ($a_\mathfrak{s}$ existiert selbstverständlich nur, falls $0 \neq \mathfrak{s} \neq \infty$ ist.)
Ist $\mathfrak{s} = \infty$, so spricht man von einem unendlichen Kettenbruch, sonst von einem endlichen.
In Aufgabe 4 der Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“ wurde gezeigt, dass die endlichen Kettenbrüche genau die rationalen Zahlen repräsentieren.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und der goldene Schnitt $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ irrational sind!