Gibt es verschiedene Arten unendlich?

Dieter Wolke

1. Zuerst zum Gebrauch des Wortes **unendlich**. Es wird in der Mathematik in zwei unterschiedlichen Bedeutungen benutzt.

Erstens im Zusammenhang mit Funktionen. Zum Beispiel bei

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Nähern wir uns mit x von rechts der Null, dann übersteigt $f(x)$ jede vorgegebene Schranke. So ist $f(x) > 10^{20}$ so bald $x < 10^{-20}$. Man sagt: $f(x)$ geht (oder divergiert) gegen ∞.
Ähnlich ist es bei $f(x) = x^2$ für $x \to \infty$. „Unendlich" also in dem Sinn, dass die Variable oder die Funktionswerte (oder beide) jede noch so große Schranke überschreiten.

Die zweite Art des Gebrauchs dient der Beschreibung „großer" Mengen. So ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ unendlich, hat unendlich viele Elemente. Keine noch so große natürliche Zahl n ist in der Lage, die Anzahl der Elemente von $\mathbb{N}$ zu charakterisieren.

Zweites Beispiel. Die Menge der Nullstellen der Sinus–Funktion $x \to \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$ ist unendlich, denn es sind die Zahlen

$$k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Mit dieser Bedeutung des Wortes unendlich wollen wir uns im Folgenden befassen. Insbesondere mit der Frage: **Kann man bei unendlichen Mengen in Bezug auf die Größe (oder Mächtigkeit) noch differenzieren**? Gibt es „sehr große" unendliche Mengen, die „mehr" Elemente haben als zum Beispiel $\mathbb{N}$?

2. Wie kann man das Wort „endlich" beim Umgang mit Mengen charakterisieren? Es gibt einelementige Mengen, zweielementige, usw. Es gibt auch die leere Menge, die kein Element enthält (z.B. die Menge der Bürger Freiburgs, die älter sind als 115 Jahre).

Es sei einmal vorausgesetzt, dass wir wissen, was die natürlichen Zahlen sind. Dann heißt eine **Menge M endlich**, wenn sie

a) leer ist oder

b) ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Elemente von M als $a_1, a_2, \dots, a_n$ numeriert werden können. (Dabei sollen zu verschiedenen Nummern auch verschiedene Elemente gehören).

Jede nicht endliche Menge heißt **unendlich**.

3. Als Beispiele für unendliche Mengen fallen einem sofort die Zahlenmengen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},\\
&\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}\\
&\mathbb{Q} = \text{Menge der rationalen Zahlen}\\
&\quad = \text{Menge der gekürzten Brüche } \frac{a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ und } n \text{ teilerfremd}).
\end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind von besonders einfacher Natur. Sie lassen sich als „Folge“ oder „Kette“ schreiben, die mit einem ersten Element beginnt, dann folgt ein zweites, dann ein drittes, usw. Die Kette hört rechts nicht auf.

Der folgende Begriff ist daher einleuchtend. Eine **Menge** M heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie

a) unendlich ist und

b) die Elemente von M sich durch $\mathbb{N}$ numerieren lassen.

(Das heißt: Jedes $a \in M$ erhält genau eine Nummer $n \in \mathbb{N}$ heißt fortan a_n. Umgekehrt wird jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $a \in M$ als a_n zugeordnet).

Oder auch: Es gibt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von $\mathbb{N}$ und denen von M.

$$1 \longleftrightarrow a_1, \quad 2 \longleftrightarrow a_2, \dots$$

$\mathbb{N}$ selbst ist abzählbar unendlich.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \dots, \quad a_n = n.$$

$\mathbb{N}_0$ ist abzählbar unendlich, z.B.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \dots \qquad a_n = n - 1.$$

Auch $\mathbb{Z}$ ist es, z.B.

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 2,\ a_5 = -2, \dots$$

Als Regel dient:

$$a_1 = 0, \quad a_{2k} = k, \quad a_{2k+1} = -k \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bei $\mathbb{Q}$ könnte man meinen, dass es nicht geht. Aber es ist möglich. Dazu ordnen wir die rationalen Zahlen nach den Nennern. In die erste, links und rechts unbegrenzte Zeile schreiben wir die Ganzen, in die zweite die Halben, in die dritte die Drittel, usw.

$$\begin{array}{ll}
(1) & \dots -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots \\
(2) & \dots -\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \dots \\
(3) & \dots -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3} \dots \\
 & \qquad \vdots
\end{array}$$

Dann ordnen wir diese doppelt unendlich vielen Zahlen zu einer Folge, indem wir das Schema in immer größer werdenden Rechtecken durchlaufen:

$$0,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}\ \ -\frac{3}{2},\quad -2,\ldots$$

Also auch hier Abzählbarkeit. Jedes $x \in \mathbb{Q}$ tritt genau einmal als Folgenglied a_n auf.

4. Das „Abzählen" oder „Numerieren" von Mengen ist ein Beispiel für das Vergleichen von Mengen hinsichtlich ihrer „Größe" oder „Mächtigkeit".

Zwei **Mengen** A und B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von A und B gibt, d.h. jedem $a \in A$ wird genau ein $b \in B$ zugeordnet, und jedes $b \in B$ ist Partner genau eines $a \in A$.

Oder: Die Elemente von A und B können zu Paaren geordnet werden, so dass

a) Monogamie herrscht und

b) weder in A noch B Unverheiratete übrigbleiben.

Abzählbar unendlich heißt hiernach: **Gleichmächtig zu** $\mathbb{N}$.

An den obigen Beispielen hat man schon gesehen: Zwei Mengen, von denen eine wesentlich umfassender erscheint als die andere, so wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$, können gleimächtig sein. Ein anderes Beispiel: Die Menge der Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, \ldots$ ist eine stark ausgedünnte Teilmenge von $\mathbb{N}$. Trotzdem ist sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass auf die Weise Endlichkeit und Unendlichkeit von Mengen charakterisiert werden können: Eine Menge ist endlich genau dann, wenn sie zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist. Sie ist unendlich, wenn es echte Teilmengen gibt, zu der sie gleichmächtig ist.

5. Nun zu unserer Hauptfrage: **Sind alle unendlichen Mengen abzählbar oder gibt es überabzählbare Mengen**? Überabzählbar bedeutet: Wie auch immer man eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen der Menge M auswählt, es werden einige nicht erfasst. M ist unendlich, aber nicht gleichmächtig $\mathbb{N}$. Keine abzählbare Teilmenge von M schöpft M völlig aus. M ist „mächtiger" als $\mathbb{N}$.

Zur Vorbereitung des Cantorschen Verfahrens betrachten wir eine weitere abzählbare Menge. Bekanntlich kann jeder Brocken Information digitalisiert, d.h. in eine endliche 01–Folge oder ein 01–Wort übersetzt werden. Sei M_ℓ die Menge aller endlichen 01–Wörter. Es fängt an mit dem leeren Wort $\square$, den zwei Wörtern 0 und 1 der Länge 1, den vier Wörtern 00, 01, 10, 11 der Länge 2, uws. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gehören 2^n 01–Wörter der Länge n. M_ℓ ist offenbar abzählbar unendlich.

Die Mathematikerin kann, im Gegensatz zum Computer, mit unendlichen 01–Wörtern arbeiten. Dies sind nicht abbrechende Zeichenreihen

$$w: \quad z_1 z_2 z_3 \ldots \quad \text{mit} \quad z_n = 0 \ \text{ oder } \ = 1 \ \text{ für } \ n = 1, 2, \ldots$$

Im Wesentlichen sind dies die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. So wie man reelle Zahlen im Dezimalsystem darstellt, z.B.

$$e - 2 = 0{,}71828\,18\,284590\ldots,$$

geht dies auch im Binärsystem. Man muss dabei nur beachten, dass ähnlich wie bei

$$0{,}13999\ldots = 0{,}14000\ldots$$

auch im Binärsystem leichte Mehrdeutigkeit herrscht:

$$0, z_1 \ldots z_k\, 0\,111 \ldots = 0, z_1 \ldots z_k\, 1\,000 \ldots$$

Der Cantorsche Beweis, der ursprünglich auf $\mathbb{R}$ ausgerichtet war, soll hier in etwas einfacherer Weise für $\boldsymbol{M_u}$, **die Menge der unendlichen 01–Wörter** geführt werden. Mit wenig Zusatzaufwand kann man die Schlussfolgerung, die Überabzählbarkeit, dann auch für $\mathbb{R}$ aussprechen.

Die Beweisstrategie ist klar: Sei $w_1, w_2, \ldots$ irgendeine Folge von M_u–Elementen, unendlichen 01–Wörtern. Dann konstruiere man ein $w \in M_u$, das nicht in der Folge auftritt, also mit keinem w_n übereinstimmt.
Wir schreiben die w_n der Reihe nach hin und benennen ihre Ziffern.

$$\begin{array}{ccccccc} w_1: & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & \ldots \\ w_2: & z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & \ldots \\ w_3: & z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Die entscheidende Idee Cantors besteht darin, auf die „Diagonalfolge“

$$w_d: \quad z_{11}\ z_{22}\ z_{33}\ z_{44}\ \ldots$$

zu schauen und diese „umzukehren“.

$$y_1 = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad z_{11} = 0 \\ 0\,, & \text{falls} \quad z_{11} = 1, \end{cases}$$
$$y_2 = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad z_{22} = 0 \\ 0\,, & \text{falls} \quad z_{22} = 1, \end{cases} \quad \text{usw.}$$

Allgemein

$$y_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad z_{nn} = 0 \\ 0\,, & \text{falls} \quad z_{nn} = 1. \end{cases}$$

Mit diesen Ziffern bildet man das Wort

$$w_c: \quad y_1 y_2 y_3 \ldots$$

Dieses Wort ist von allen w_n unserer Folge verschieden. Denn für beliebiges n ist die n–te Ziffer von w_n gleich z_{nn}, die n–te Ziffer von w_c gleich y_n. Nach Konstruktion ist aber $z_{nn} \neq y_n$, also sind w_n und w_c verschieden, da sie sich in mindestens einer Ziffer unterscheiden. Mit w_c ist also ein Wort gefunden, das nicht in der Folge $w_1, w_2, w_3, \ldots,$ vorkommt. Ergebnis: $\boldsymbol{M_u}$ **ist überabzählbar**.

Die wichtige Cantorsche Idee, die Diagonale umzukehren, hat sich als ungemein fruchtbar erwiesen, und tritt heute als „**Cantorsches Diagonalverfahren**" in vielen Untersuchungen entscheidend auf. Zum Beispiel bei grundsätzlichen Fragen wie:

Was kann ein Computer prinzipiell leisten? Kann man die mathematische Forschung ohne Verlust Computern überlassen? (Antwort: Nein!)

Georg Cantor lebte von 1845–1918. Zwischen 1875 und 1884 veröffentlichte er seine epochemachenden Arbeiten zur Mengenlehre, die durch ihn überhaupt erst zu einem Teilgebiet der Mathematik wurde.

6. Es wurde eben gezeigt, dass man zu der abzählbaren unendlichen Menge M_ℓ die „größere" M_u angeben kann. Man kann allgemein fragen, ob sich zu jeder unendlichen Menge M eine mächtigere M' finden lässt. Zu einer natürlichen Zahl n eine größere anzugeben, ist kein Problem, zum Beispiel tut es immer $n+1$. Gibt es zu unendlichen Mengen ein ähnlich einfaches Rezept? Das gibt es, wenn auch nicht ganz so simpel.

Zu jeder Menge M lässt sich die **Potenzmenge** $P(M)$ definieren. Als Elemente von $P(M)$ dienen alle Teilmengen von M. Bei endlichen M hat man eine gute Vorstellung von $P(M)$.

$$\begin{array}{l}
P(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad P(\emptyset) \quad \text{hat ein Element.} \\
P\big(\{1\}\big) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}, \quad \text{hat zwei Elemente.} \\
P\big(\{1,2\}\big) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}, \quad \text{hat vier Elemente.} \\
\text{Allgemein: } P\big(\{1,\ldots,n\}\big) \quad \text{hat} \quad 2^n \quad \text{Elemente.}
\end{array}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt stets $2^n > n$. Für endliche Mengen stimmt also die Aussage, dass $P(M)$ mächtiger ist als M.

Sie gilt auch für unendliche Mengen. Dazu überlegt man sich zwei Dinge

a) $P(M)$ hat mindestens so viele Elemente wie M. Dies ist einfach. Denn $P(M)$ hat alle einelementigen Teilmengen $\{a\}$ mit $a \in M$ als Elemente. Das zweite

b) $P(M)$ hat „mehr" Elemente als M, ist trickreicher.

Es wird ähnlich wie oben gezeigt. Da M nicht unbedingt abzählbar ist, muss man etwas abstrakter argumentieren. Es werde jedem $a \in M$ ein $T(a) \in P(M)$, d.h. eine Teilmenge von M zugeordnet. Verschiedenen a's werden verschiedene $T(a)$ zugeordnet. Es findet also eine „Massenhochzeit" statt, bei der alle M–Elemente a eine(n) Partner(in) $T(a) \in P(M)$ abbekommen. Wenn wir zeigen können, dass auf der $P(M)$–Seite stets mindestens ein Element übrig bleibt, ist das Ziel erreicht. $\boldsymbol{P(M)}$ **ist mächtiger als** $\boldsymbol{M}$. Ein solches „Mauerblümchen" $A \in P(M)$ bzw. $A \subseteq M$ zu finden, ist nicht ganz einfach.

Jedem $a \in M$ wird $T(a) \subseteq M$ zugeordnet. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten

$$1) \qquad a \in T(a) \quad \text{und} \quad 2) \qquad a \notin T(a)$$

In die Menge A nehmen wir alle $a \in M$ auf, für die die zweite Alternative $a \notin T(a)$ gilt.

A kann leer sein, es kann ganz M sein, oder irgendeine Teilmenge von M. Wie es aussieht, spielt keine Rolle. Es wird sich als Mauerblümchen herausstellen.

Wir nehmen an, es hätte einen Partner, ein Urbild b in M, d.h.

$$A = T(b).$$

Was gilt für b?

$$1) \qquad b \in A \quad \text{oder} \qquad 2) \qquad b \notin A.$$

Im Fall 1) ist $b \in A = T(b)$. Nach Konstruktion von A müßte aber $b \notin T(b)$ gelten. Im Fall 1) kommen wir somit zu den einander widersprechenden Aussagen

$$b \in T(b) \quad \text{und} \quad b \notin T(b).$$

Der Fall 1) kann also nicht eintreten.

Bleibt Fall 2) $b \notin A = T(b)$. Wegen $b \notin T(b)$ wird b in A aufgenommen, also $b \in A = T(b)$. Erneut ein Widerspruch!

Der Widerspruch kann nur dadurch aufgelöst werden, dass wir die Annahme „A hat ein Urbild b“ fallen lassen. Das $P(M)$–Element A wird also bei der Paar–Bildung $\big(a, T(a)\big)$ nicht erfasst. $P(M)$ ist „größer“ als M.

Das Rezept „Man gehe über zur Potenzmenge“, mehrfach angewandt, führt also zu schwindelerregend großen Mengen. Man kann sich nach diesen ersten Überlegungen vorstellen, zu wievielen, zum Teil noch heute ungelösten Fragen, der Cantorsche Anstoß geführt hat. Die mengentheoretischen Begriffe, naiv benutzt, führen auch schnell zu Widersprüchlichkeiten. Das scheinbar vernünftige Objekt „Die Menge aller Mengen“ wäre so etwas wie die größte, umfassendste aller Mengen. Andererseits haben wir gerade festgestellt, dass es eine solche Menge nicht geben kann. Insofern hat Cantors Einführung der Mengenlehre auch dazu geführt, grundsätzlich über das mathematische Formulieren und Argumentieren nachzudenken. Denn eine mathematische Theorie, die Absurditäten erlaubt, taugt nichts.