

Übungen zur Vorlesung
Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 10.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 3.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}_0$. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}_0$, heißt (additives) **Komplement** zu \mathcal{A} , wenn

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \supseteq \mathbb{N}$$

gilt. Sei \mathcal{B} Komplement zu

$$\mathcal{A} = \{0, 1\} \text{ vereinigt mit der Menge der Primzahlen.}$$

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B(n) = \#\{1 \leq b \leq n, b \in \mathcal{B}\} \geq c \cdot \ln(n+1)$$

mit einem universellen $c > 0$.

Aufgabe 4.

Konstruieren Sie Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 < \sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B}) < \frac{1}{2}$ und

(a) $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})$ bzw.

(b) $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) > \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})$.

Aufgabe 5.

(a) $25 = 3^2 + 4^2 + 0^2$, aber die Gleichung $25 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ besitzt keine Lösung mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

(b) Für $a \in \mathbb{N}$ hat $n = 4^a \cdot 25$ - bis auf Vertauschungen - nur die Darstellung

$$n = (2^a \cdot 3)^2 + (2^a \cdot 4)^2 + 0^2$$

als Summe dreier Quadrate.