

Übungen zur Vorlesung  
Zahlentheorie II – WS 2005/2006  
Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 17.11.2005, vor der Vorlesung

**Aufgabe 7.**

Sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq b_1 < \dots < b_k$  ( $b_j \in \mathbb{N}$ ). Für  $x \geq 1$  sei

$$T(x, b_1, \dots, b_k) = \#\{a \leq x; a, a + b_1, \dots, a + b_k \in \mathcal{A}\}.$$

Dann gilt mit

$$S(y, a) = \sum_{a \leq y, a \in \mathcal{A}} e(a\alpha) \quad \text{die Gleichung}$$
$$T(x, b_1, \dots, b_k) = \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_k S(x, \alpha_1 + \dots + \alpha_k) \prod_{j=1}^k \bar{S}(x + b_j, \alpha_j) e(\alpha_j b_j).$$

**Aufgabe 8.**

Die Partitionsfunktion  $p(n)$  zählt, auf wieviele Arten  $n$  als Summe natürlicher Zahlen geschrieben werden kann.

$$p(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \#\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k, a_1 + \dots + a_k = n\}.$$

**Beh.**

1)  $p(n) = \#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^k, x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n\}.$

2) Für  $|x| < 1$  gilt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{-1}.$$

Zeigen Sie die Identität zumindest formal, d.h. ohne Konvergenz-Überlegungen.

3)\*  $np(n) = \sum_{r=1}^n r \sum_{1 \leq k \leq n/r} p(n - rk).$

**Aufgabe 9.**

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  wird  $e^{2\pi i \alpha}$  durch  $e(\alpha)$  abgekürzt und

$$\|\alpha\| = \min(\alpha - [\alpha], [\alpha] + 1 - \alpha)$$

(Abstand von  $\alpha$  zur nächstgelegenen ganzen Zahl) gesetzt.

Dann gilt für  $N_1 < N_2$ ;  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\left| \sum_{N_1 < n \leq N_2} e(n\alpha) \right| \leq \min\left(N_2 - N_1, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right).$$