Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

10.11.2005

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 17.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 7.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}, k \in \mathbb{N},\ 1 \le b_1 < \ldots < b_k\ \ (b_j \in \mathbb{N})$. Für $x \ge 1$ sei

$$T(x, b_1, \ldots, b_k) = \#\{a \le x;\ a, a+b_1, \ldots, a+b_k \in \mathcal{A}\}.$$

Dann gilt mit

$$S(y,a) = \sum_{a \le y, a \in \mathcal{A}} e(a\alpha) \quad \text{die Gleichung}$$

$$T(x, b_1, \ldots b_k) = \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_k\ S(x, \alpha_1 + \ldots + \alpha_k) \prod_{j=1}^{k} \overline{S}(x+b_j, \alpha_j)\, e(\alpha_j b_j).$$

Aufgabe 8.

Die Partitionsfunktion $p(n)$ zählt, auf wieviele Arten n als Summe natürlicher Zahlen geschrieben werden kann.

$$p(n) = \sum_{1 \le k \le n} \#\big\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k,\ a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k,\ a_1 + \cdots + a_k = n\big\}.$$

Beh.

1) $p(n) = \#\big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^k,\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n\big\}$.

2) Für $|x| < 1$ gilt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{-1}.$$

Zeigen Sie die Identität zumindest formal, d.h. ohne Konvergenz–Überlegungen.

3)* $np(n) = \sum\limits_{r=1}^{n} r \sum\limits_{1 \le k \le n/r} p(n - rk)$.

Aufgabe 9.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wird $e^{2\pi i \alpha}$ durch $e(\alpha)$ abgekürzt und

$$\|\alpha\| = \min\big(\alpha - [\alpha], [\alpha] + 1 - \alpha\big)$$

(Abstand von α zur nächstgelegenen ganzen Zahl) gesetzt.
Dann gilt für $N_1 < N_2;\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\Big| \sum_{N_1 < n \le N_2} e(n\alpha) \Big| \le \min\Big(N_2 - N_1,\ \frac{1}{2\|\alpha\|}\Big).$$