Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

01.12.2005

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 08.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 16.
Zeigen Sie die folgenden – wohlbekannten, aber selten bewiesenen – Aussagen über die Dezimal–Entwicklung reeller Zahlen.

1) Jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \alpha < 1$ hat genau eine Darstellung:
$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, 10^{-j}$$
mit $c_1, c_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei unendlich viele der c_j ungleich 9 sind.

2) Für die c_j besteht die Rekursion
$$\alpha_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \alpha,\ \ \alpha_{j+1} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\alpha_j 10\},\ \ c_j = [\alpha_j 10].$$

Aufgabe 17.
Zeigen Sie: α ist rational genau dann, wenn die Folge (c_j) ab einer Stelle periodisch wird.

Aufgabe 18.
Leiten Sie unter Annahme der Riemannschen Vermutung und unter Benutzung der Tatsachen
$$\psi(x) = x - \sum_{\rho, |\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T} \ln^2 x\Big) \qquad (2 \le T \le x),$$
$$N(T+1) - N(T) = \#\{\rho = \zeta + i\eta,\ T < \eta \le T+1\} = \mathrm{O}(\ln T)$$
die Formeln
$$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x\big),$$
$$\pi(x) = \mathrm{Li}x + \mathrm{O}\big(x^{\frac{1}{2}} \ln x\big), \qquad \Big(\mathrm{Li}x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\,, \quad x \ge 2\Big)$$
her.