Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 15.12.2005
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, den 22.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 22. Der Satz von Gelfond–Schneider (1934/35) besagt:
Seien α und $\beta \in \mathbb{C}$ algebraische Zahlen; $\alpha \neq 0, 1$; $\beta \notin \mathbb{Q}$. $\log \alpha$ bezeichne einen beliebigen Zweig des Logarithmus (d.h. eine Zahl c mit $e^c = \alpha$). Dann ist $\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha)$ transzendent.

1) Beweisen Sie die Transzendenz der Zahlen

$$2^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ e^{\pi},\ e^{\pi\sqrt{163}}$$

(Die letzte Zahl hat die Gestalt $n + 0{,}999\,999\,999\,925\ldots$).

2) Der Satz von Gelfond–Schneider ist äquivalent zu: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$, $\ln \alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$. Dann ist mindestens eine der drei Zahlen $\alpha, \beta, \alpha^\beta$ transzendent.

3) Folgern Sie aus dem Satz von Gelfond–Schneider: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ algebraisch und $\neq 0$. $\log \alpha_1$ und $\log \alpha_2$ seien linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

(kurz: Aus der linearen Unabhängigkeit über $\mathbb{Q}$ folgt die über dem Körper der algebraischen Zahlen).

Aufgabe 23.
Die Gregory–Leibnizsche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

ist wegen der langsamen Konvergenz der Reihe zur praktischen Berechnung von π ungünstig.

bitte wenden

1) Benutzen Sie die Formel

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}\,,$$

angewandt auf

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right),\quad \tan\left(4\arctan\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)$$

zur Herleitung der Gleichung von John **Machin** (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

2) Für $\alpha, \beta > 0$ gilt

$$\arctan\frac{1}{\alpha} = \arctan\frac{1}{\alpha+\beta} + \arctan\frac{\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+1}.$$

3) Zeigen Sie mit 2)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\\ &= 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}.\end{aligned}$$

Mit der Formel in 1) berechnete Machin die ersten 100 Dezimalstellen von π. Euler bestimmte mit der letzten Formel in 3) innerhalb einer Stunde von Hand die ersten 20 Stellen.