

Übungen zur Vorlesung
Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 12.01.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 24. Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Seien $P_1, P_2 \dots$ Punkte, die nach den angegebenen Vorschriften schon gefunden wurden. Dabei sollen die Konstruktionsregeln wie folgt verschärft werden: Es dürfen Kreise um konstruierte Punkte P geschlagen werden. Als Radien sind nur die Abstände von P zu anderen konstruierten Punkten P' zugelassen.

- 1) Für $P_1 \neq P_2$ sei G die Gerade durch P_1 und P_2 . Man konstruiere die Parallele zu G durch einen Punkt P_3 .
- 2) Sei r der Abstand von P_1 und P_2 . Man konstruiere den Kreis vom Radius r um P_3 .
- 3) Seien r_1 und $r_2 > 0$ die Abstände von P_1 und P_2 bzw. P_3 und P_4 . Man konstruiere die Punkte $(r_1 r_2, 0)$ und $(r_1 / r_2, 0)$.

Hinweis: Strahlensatz.

- 4) Sei r der Abstand von P_1 und P_2 . Ist $(\sqrt{r}, 0)$ konstruierbar?

Hinweis: Man nehme $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1 + r, 0)$ und schlage den Halbkreis vom Radius $\frac{1}{2}(1 + r)$ um $(\frac{1}{2}(1 + r), 0)$.

Aufgabe 25.

Wallis-Produkt für π (John W., 1616–1703, 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

Das Produkt konvergiert, da $\frac{4n^2}{4n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{4n^2 - 1}$ und $\sum \frac{1}{4n^2 - 1}$ konvergiert. Zeigen Sie dazu:

- 1) Für $I_n \stackrel{\text{Df}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ gilt

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)},$$

- 2) $\frac{\pi}{2} = p_n \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ mit $p_n = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$,

- 3) $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}$,
 $0 \leq \frac{\pi}{2} - p_n \leq \frac{\pi}{4n}$.