Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

22.12.2005

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 12.01.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 24. Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Seien $P_1, P_2 \dots$ Punkte, die nach den angegebenen Vorschriften schon gefunden wurden. Dabei sollen die Konstruktionsregeln wie folgt verschärft werden: Es dürfen Kreise um konstruierte Punkte P geschlagen werden. Als Radien sind nur die Abstände von P zu anderen konstruierten Punkten P' zugelassen.

1) Für $P_1 \neq P_2$ sei G die Gerade durch P_1 und P_2. Man konstruiere die Parallele zu G durch einen Punkt P_3.

2) Sei r der Abstand von P_1 und P_2. Man konstruiere den Kreis vom Radius r um P_3.

3) Seien r_1 und $r_2 > 0$ die Abstände von P_1 und P_2 bzw. P_3 und P_4. Man konstruiere die Punkte $(r_1 r_2, 0)$ und $(r_1/r_2, 0)$.
Hinweis: Strahlensatz.

4) Sei r der Abstand von P_1 und P_2. Ist $(\sqrt{r}, 0)$ konstruierbar?
Hinweis: Man nehme $(0,0), (1,0)$ und $(1+r, 0)$ uns schlage den Halbkreis vom Radius $\frac{1}{2}(1+r)$ um $\left(\frac{1}{2}(1+r), 0\right)$.

Aufgabe 25.

Wallis–Produkt für π (John W., 1616–1703, 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Das Produkt konvergiert, da $\dfrac{4n^2}{4n^2-1} = 1 + \dfrac{1}{4n^2-1}$ und $\sum \dfrac{1}{4n^2-1}$ konvergiert. Zeigen Sie dazu:

1) Für $I_m \underset{\mathrm{Df}}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$ gilt

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$$

2) $\dfrac{\pi}{2} = p_n \cdot \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ mit $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$,

3) $1 \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \dfrac{1}{2n}$,
$0 \leq \dfrac{\pi}{2} - p_n \leq \dfrac{\pi}{4n}$.