Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

24.10.2006

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 31.10.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Leonard Euler gab 1737 den folgenden „Beweis" zu $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$.

Sei $A = \sum_p \frac{1}{p}$, $B = \sum_p \frac{1}{p^2}$, $C = \sum_p \frac{1}{p^3}, \ldots$

Dann gilt

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}+\cdots} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \quad \Big(= \prod_p \frac{p}{p-1} \Big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Die erste Identität beruht auf

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = \ln \Big(\frac{p}{p-1} \Big).$$

Da $\frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \cdots$ beschränkt ist, folgt $A = \infty$.
Zeigen Sie, dass nach heutigem Standard alle Schritte stichhaltig sind.

Aufgabe 2.

1) Schließen Sie aus der Divergenz der Reihe $\sum_p \frac{1}{p}$ auf

$$\prod_{p \le x} \Big(1 - \frac{1}{p} \Big) \to \mathrm{o} \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

2) Leiten Sie aus 1) $\pi(x) = \mathrm{o}(x)$ her.

bitte wenden

Aufgabe 3^***.**
Konstruieren Sie eine Folge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ $(a_1 < a_2 < \ldots)$
mit $\sum\limits_{\substack{a \leq x \\ a \in \mathcal{A}}} \dfrac{1}{a} = \ln \ln x + c + \mathrm{o}(1)$, ($c$ ist eine reelle Konstante) aber $\dfrac{A(x)}{x/\ln x} \nrightarrow 1$ für $x \to \infty$
$\big(A(x) = \#\{a_j \leq x\}\big)$.

Hieran sieht man, dass allein aus der asymptotischen Formel für $\sum\limits_{p \leq x} \dfrac{1}{p}$ nicht auf den Primzahlsatz geschlossen werden kann.