Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

07.11.2006

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 14.11.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 7.

Analytische Fortsetzung der Zeta–Funktion mit Hilfe der alternierenden Reihe.
Zeigen Sie:

a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^s}$ konvergiert für $\sigma > 0$.

b) Für $\sigma > 1$ gilt: $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^s}\ (2^{1-s} - 1)^{-1}$.

Bemerkung: Durch b) erhält man die meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ in die Halbebene $\{\sigma > 0\}$.

Aufgabe 8.

Nach Legendre ist ein $n \in \mathbb{N}$ genau dann Summe dreier Quadrate $\in \mathbb{N}_0$, wenn es nicht die Gestalt $4^a(8b+7)$ $(a, b \in \mathbb{N}_0)$ hat. Zeigen Sie für $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} N_3(x) &\underset{\text{Df}}{=} \#\big\{n \leq x,\ n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0)\big\} \\ &= \frac{5}{6}\, x + \mathrm{O}(\ln x). \end{aligned}$$

Aufgabe 9.

a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für kein $s = 1 + it,\ t \in \mathbb{R}$.

b) Die Primzahlreihe $\sum\limits_{p} \frac{1}{p^s}$ konvergiert für alle Punkte $s = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Hinweis: Verwenden Sie in b) den Primzahlsatz in der Form

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big).$$