Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 21.11.2006
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 28.11.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 13.

Zeigen Sie – ohne auf den Satz von Hadamard–de la Valleé–Poussin zurückzugreifen – falls für ein $t \neq 0 \quad \zeta(1+it) = 0$ gilt, dann ist die Nullstelle einfach.
Hinweis: Ist m der Grad der Nullstelle, dann gilt für $1 < \sigma \leq 2$

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \geq \frac{C}{(\sigma-1)^m} \quad \text{mit einem} \quad C > 0$$

Schätzen sie die linke Seite mit 1.4(2) nach oben ab.

Aufgabe 14.
Sei für $x \geq 1$

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Newman'schen Tauber–Satzes

$$\int_0^\infty M\big(e^y\big)\, e^{-y}\, dy \quad \text{konvergiert.}$$

b) Leiten Sie aus a)

$$M(x) = \mathrm{o}(x) \quad \text{her.}$$

Aufgabe 15.

Sei p_n die n–te Primzahl. Leiten Sie aus dem Primzahlsatz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$$

her.