Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 05.12.2006
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 12.12.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 19.
Für $k \in \mathbb{N}$ seien $1 = a_1 < \cdots < a_{\varphi(k)} \leq k$ die $\varphi(k)$ reduzierten Reste modulo k. χ_1 (= Hauptcharakter mod k), $\chi_2, \ldots, \chi_{\varphi(k)}$ seien die Charaktere mod k. Die „Charakter–Matrix“ $A = (\alpha_{j\ell})$ ist definiert durch

$$\alpha_{j\ell} = \chi_\ell(a_j).$$

Berechnen Sie $A \cdot \bar{A}^T$.

Aufgabe 20.
Bezeichne für $n > 1$ $f(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n als Produkt von Zahlen > 1, d.h.

$$f(n) = \sum_{k \geq 1} \#\big\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \quad n_j \geq 2, \quad n = n_1 \ldots n_k\big\}.$$

$f(1) = 1$. Dann gilt für ein $\sigma_0 > 1$ und alle s mit $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s} = \big(2 - \zeta(s)\big)^{-1}.$$

Bestätigen Sie die Identität zumindest formal, d.h. ohne Konvergenz–Überlegungen.

Aufgabe 21.
Sei $k(n) = \operatorname{kgV}(1, \ldots, n)$ Dann gilt

$$k(n) = \exp\big(n(1 + \mathrm{o}(1))\big) \quad (n \to \infty).$$