

Übungen zur Vorlesung
Analytische Zahlentheorie
WS 2006/07
Blatt 10

Abgabe: Dienstag, 16.01.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 28.

Geben Sie asymptotische Formeln für die Anzahlen

$$P_1(x) = \#\left\{11 < p \leq x, \left(\frac{p}{7}\right) = \left(\frac{p}{11}\right) = -1\right\} \quad \text{und}$$
$$P_2(x) = \#\left\{11 < p \leq x, \left(\frac{7}{p}\right) = 1, \left(\frac{11}{p}\right) = -1\right\}, \quad (x \geq 11) \text{ an.}$$

Aufgabe 29.

Sei $R(x) = \psi(x) - x$

a) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx.$$

b) Falls für ein $\alpha \in (0, 1)$

$$R(x) = O(x^\alpha) \quad (x \geq 2)$$

erfüllt ist, existiert keine Nullstelle ρ der ζ -Funktion mit $\operatorname{Re} \rho > \alpha$

Aufgabe 30.

Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_p \frac{1}{p^\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log \zeta(k\sigma).$$

Dabei wird $\log \zeta(s)$ für $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 1$ reellwertig definiert und in die Halbebene $\{s, \sigma > 1\}$ holomorph fortgesetzt.