Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

16.01.2007

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 23.01.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 31.

a) Die Zahlen $\frac{p_1}{p_2}$ $(p_1, p_2$ prim) liegen dicht in $\mathbb{R}_{\geq 0}$

b) Die Zahlen $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ $\big(a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ (a^2+b^2, c^2+d^2) = 1\big)$ liegen dicht in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 32.
Leiten Sie unter Annahme der Riemannschen Vermutung und unter Benutzung der Tatsachen

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho, |\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\ln^2 x\Big) \qquad (2 \leq T \leq x),$$
$$N(T+1) - N(T) = \#\{\rho = \zeta + i\eta,\ T < \eta \leq T+1\} = \mathrm{O}(\ln T)$$

die Formeln

$$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x\big) \quad \text{und} \quad \pi(x) = \mathrm{Li}x + \mathrm{O}\big(x^{\frac{1}{2}}\ln x\big)$$

her.

Aufgabe 33.
Sei p_n die n–te Primzahl. Folgern Sie aus der Riemannschen Vermutung

$$p_{n+1} - p_n = \mathrm{O}\big(p_n^{1/2+\varepsilon}\big) \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0.$$

Bemerkung: Es gilt genauer $p_{n+1} - p_n = \mathrm{O}(p_n^{1/2}\ln^2 p_n)$.