Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 23.01.2007
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 12

Abgabe: Dienstag, 30.01.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 34.

a) Die Liouville–Zahlen bilden eine überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$.

b) Die Liouville–Zahlen ($\mathbb{L}$) bilden eine Menge vom Lebesgue–Maß Null, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es abzählbar viele abgeschlossene Intervalle, deren Vereinigung $\mathbb{L}$ umfasst, und deren Gesamtlänge $< \varepsilon$ ist.

Aufgabe 35.
Für $n = p_1^{k_1} \dots p_\ell^{k_\ell}$ (kanonische Zerlegung) sei $f(n)$ durch $k_1 \dots k_\ell$ definiert, $f(1) := 1$.
Beh. Für $\sigma = \mathrm{Re}s > 1$ gilt

$$\sum_n f(n) n^{-s} = \zeta(s)\,\zeta(2s)\,\zeta(3s)\,\big(\zeta(6s)\big)^{-1}.$$

Beweisen Sie die Aussage zumindest formal.

Aufgabe 36.

Sei $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2^{a_n} \quad (n \geq 1)$.
Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$$

Liouville–Zahl, also transzendent ist.