

Übungen zur Vorlesung
Analytische Zahlentheorie
WS 2006/07
Blatt 13

Abgabe: Dienstag, 06.02.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 37.

Bekanntlich läßt sich jedes $\alpha \in [0, 1)$ als Dezimalzahl

$$\alpha = 0, z_1 z_2 \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu} 10^{-\nu} \quad (z_{\nu} \in \{0, \dots, 9\})$$

schreiben. Die Darstellung ist eindeutig, wenn „ $z_{\nu} = 9$ ab einer Stelle ν_0 “ ausgeschlossen wird.

Zeigen Sie: α ist genau dann rational, wenn die Folge (z_{ν}) ab einer Stelle periodisch ist.

Aufgabe 38.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es existiere ein $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ sowie eine Folge c_n/d_n rationaler Zahlen mit $d_n \rightarrow \infty$, $(c_n, d_n) = 1$ und $\forall n : \left| \alpha - \frac{c_n}{d_n} \right| < \frac{1}{nf(n)}$.
Dann ist α irrational.

Aufgabe 39.

- 1) Es sei $A = (a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die wir uns als Dezimalzahlen vorgeben. Schreibt man die Ziffern von a_1 nacheinander hin, beginnend mit 0, $** \dots$, hängt die von a_2 an, sodann die von a_3 usw., dann erhält man eine reelle Zahl $r_A \in [0, 1]$.

Die Folge A habe folgende Eigenschaften

- a) A ist schwach monoton steigend;
b) zu jedem $k \geq k_0$ existiert ein n , so daß $10^{k-1} \leq a_n < a_{n+1} < 10^k$ gilt.
Zeigen Sie: r_A ist irrational.

- 2) Fallen die quadratfreien Zahlen, die Primzahlen, die Quadratzahlen unter 1)?