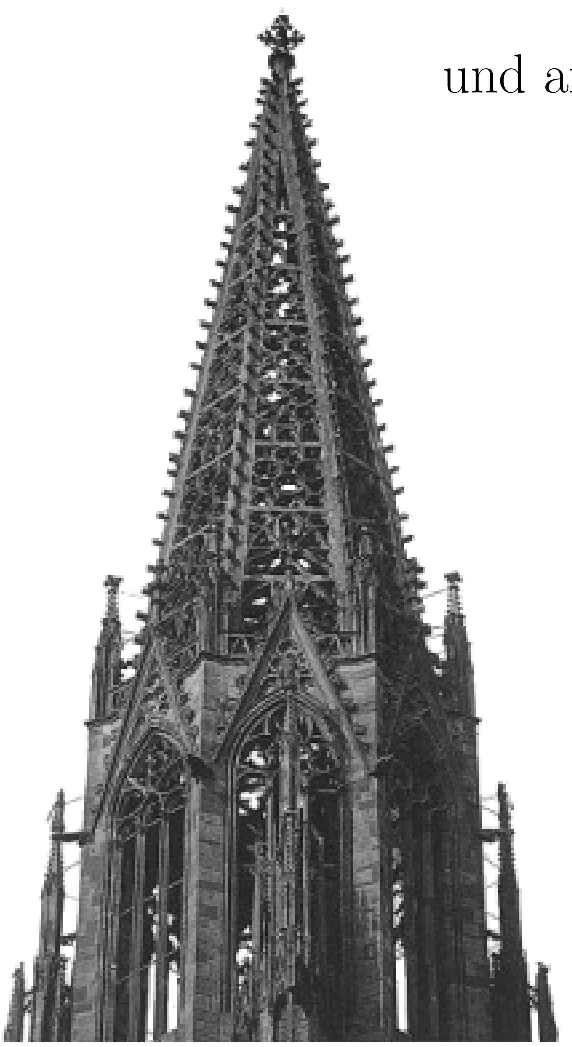
Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Mathematisches Institut

ELAZ 02

Deutsch-österreichische Tagung
über aktuelle Probleme
der elementaren
und analytischen Zahlentheorie
08. – 12. April 2002



Bericht über
ELAZ 02

Deutsch-österreichische Tagung
über aktuelle Probleme
der elementaren und analytischen Zahlentheorie
Freiburg, 08. – 12. April 2002

Die Konferenz wurde organisiert durch Manfred Peter, Jürgen Spilker und Dieter Wolke vom Mathematischen Institut der Universität Freiburg. Vor zwei Jahren, vom 03. bis zum 07. April 2000, fand das erste Treffen der deutschen Arbeitsgruppen im Bereich der elementaren und analytischen Zahlentheorie in Goslar statt. Es wurde vereinbart, diesen Erfahrungsaustausch zu einer regelmäßigen Einrichtung werden zu lassen. Der Teilnehmerkreis des zweiten Treffens – ELAZ 02 in Freiburg – wurde durch die Mitwirkung einiger Kollegen aus Wien erweitert. 25 Kolleginnen und Kollegen hielten Vorträge über eigene Arbeiten. Die Themen deckten ein weites Spektrum zahlentheoretischer Gebiete ab:

- Gitterpunktprobleme
- additive Fragen
- Dirichlet-Reihen
- zahlentheoretische Funktionen
- Primzahlverteilung
- algebraische Zahlentheorie
- probabilistische Zahlentheorie

Studierende der Universität Freiburg hatten Gelegenheit, an den Vorträgen teilzunehmen.

Die Katholische Akademie in unmittelbarer Nähe zur Freiburger Altstadt und zum Stadtpark erwies sich als außerordentlich angenehmer Tagungsort. Die Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft des Personals trugen sehr zum Gelingen der Tagung bei.

Münster- und Stadtführung, sowie eine Weinprobe im Weingut Baumann, Freiburg-Munzingen, sorgten für einen fröhlichen geselligen Abschluss des Treffens.

Die Organisatoren danken den folgenden Institutionen für großzügige finanzielle Unterstützung:

- Badenova AG
- Deutsche Bank AG, Freiburg
- Sparkasse Freiburg-Nördlicher Breisgau
- Volksbank Freiburg

Es ist fest mit einem ähnlichen Treffen in zwei Jahren zu rechnen.

Programm

Montag, 08.04.02	Anreise
Dienstag, 09.04.02	
9.00 Uhr	Eröffnung
9.10 - 9.55 Uhr	Jörg Brüdern, Stuttgart: „Systeme kubischer Formen“
10.05 - 10.35 Uhr	Jürgen G. Hinz, Marburg: „Über ein Problem von Tschebyscheff in algebraischen Zahlkörpern“
	Kaffee (Tee) - Pause
11.00 - 11.30 Uhr	Ulrich Rausch, Marburg: „Die Anzahl ganzalgebraischer Zahlen in Quadern“
11.40 - 12.10 Uhr	Eduard Wirsing, Ulm: „Reguläre n–Ecke zu teilen“
	Mittagessen und Kaffee (Tee) - Pause
14.30 - 15.00 Uhr	Werner Georg Nowak, Wien: „Mittelwerte über kurze Intervalle für Restterme in der Gitterpunktlehre“
15.10 - 15.40 Uhr	Gerald Kuba, Wien: „Zur Verteilung der Quadrate ganzer Oktaven“
15.45 - 16.15 Uhr	Manfred Kühleitner, Wien: „Über die Klassenzahl quadratischer Formen: Untere Abschätzungen für das Restglied“
16.35 - 17.05 Uhr	Rainer Dietmann, Stuttgart: „Kleine Lösungen additiver Kongruenzen“
17.15 - 17.35 Uhr	Stefan Wehmeier, Paderborn: „Additive arithmetische Halbgruppen: elementare Methoden“
Mittwoch, 10.04.02	
9.00 - 9.45 Uhr	Ekkehard Krätzel, Wien: „Summenformeln in der analytischen Zahlentheorie“
9.55 - 10.25 Uhr	Tobias Bekehermes, Clausthal: „Ein neuer Beweis des Beurlingschen Primzahlsatzes“
	Kaffee (Tee) - Pause
10.55 - 11.25 Uhr	Günter Köhler, Würzburg: „Etaprodukte und rationale Simplizes“
11.30 - 12.00 Uhr	Kathrin Bringmann, Würzburg: „Asymptotische Formeln für verschiedene Partitionenanzahlen“

12.05 - 12.25 Uhr	Valentin Blomer, Stuttgart: „Ein Problem von Erdös: Summen von zwei quadratvollen Zahlen“
	Mittagessen und Kaffee (Tee) - Pause
14.10 - 14.40 Uhr	Christian Elsholtz, Clausthal: „Neues über Summen von zwei Quadraten“
14.50 - 15.20 Uhr	Jan-Christoph Puchta, Freiburg: „Die Quersumme modulo 2 in dünnen Folgen“
15.30 - 16.00 Uhr	Manfred Peter, Freiburg: „Werte von Dirichlet-Reihen an ganzzahligen Stellen und kombinatorische Identitäten“
	Kaffee (Tee) - Pause
16.30 - 17.00 Uhr	Helmut Maier, Ulm: „Kreisteilungspolynome, deren Ordnungen viele Primfaktoren enthalten“
17.10 - 17.40 Uhr	Wolfgang Schwarz, Frankfurt: „Zur Berechnung von Mittelwerten von Produkten geshifteter multiplikativer Funktionen“
19.30 Uhr	Problem-Stunde und Film-Vorführung „Kurt Gödel“
Donnerstag, 11.04.02	
9.00 - 9.45 Uhr	Karl-Heinz Indlekofer, Paderborn: „Eine neue Methode in der probabilistischen Zahlentheorie“
9.55 - 10.25 Uhr	Lutz Lucht, Clausthal: „Dichteschranken für σ-freie Mengen“
	Kaffee (Tee) - Pause
10.55 - 11.25 Uhr	Dieter Wolke, Freiburg: „Bemerkungen zum Primzahl-Zwillingsproblem“
11.35 - 12.05 Uhr	Stephan Baier, Berlin: „Eine Bemerkung zur Bateman-Horn-Vermutung“
	Mittagessen und Kaffee (Tee) - Pause
14.20 - 14.50 Uhr	Jürgen Spilker, Freiburg: „Die Ziffern der Fibonacci-Zahlen“
14.55 - 15.25 Uhr	Jörn Steuding, Frankfurt: „Über die Universalität von Zeta-Funktionen“
16.00 Uhr ca. 18.00 Uhr	Münsterführung Weinprobe mit Vesper im Weingut Baumann, Freiburg-Munzingen
Freitag, 12.04.02	Abreise

Eine Bemerkung zur Bateman-Horn-Vermutung

Stephan Baier, Berlin

P.T. Bateman

Let r be a positive integer and $f_1, ..., f_r$ be distinct polynomials in $\mathbb{Z}[X]$. If $f_1(n), ..., f_r(n)$ are all prime for infinitely many n, then it is necessary that the polynomials f_i are irreducible in $\mathbb{Z}[X]$, have positive leading coefficients, and no prime p divides all values of the product $f_1(n) \cdots f_r(n)$, as n runs over $\mathbb{Z}$. Assuming these necessary conditions, Bateman and Horn proposed a conjectural asymptotic estimate on the number of positive integers $n \leq x$ such that $f_1(n), ..., f_r(n)$ are all prime.

We apply the Hardy-Littlewood circle method to study the Bateman-Horn conjecture when $r \geq 2$. We consider the Bateman-Horn conjecture for the polynomials in any partition $\{f_1, ..., f_s\}$, $\{f_{s+1}, ..., f_r\}$ with a linear change of variables. Our main result is as follows: If the Bateman-Horn conjecture on such a partition and change of variables holds true with some conjectural error terms, then the Bateman-Horn conjecture for $f_1, ..., f_r$ is equivalent to a plausible error term conjecture for the minor arcs in the circle method.

Ein neuer Beweis des Beurlingschen Primzahlsatzes

Tobias Bekehermes, Clausthal

A. Beurling

Für verallgemeinerte Primzahlen (g-Primzahlen) $1 < p_1 \leq p_2 \leq \ldots, p_k \to \infty$, und die dadurch erzeugte multiplikative Halbgruppe $\mathcal{N}$ von g-Zahlen $1 = n_1 < n_2 \leq n_3 \leq \ldots$ mit

$$N(x) := \sum_{n_k \leq x} 1 \qquad \text{und} \qquad \pi_{\mathcal{N}}(x) := \sum_{p_k \leq x} 1$$

bewies Beurling (1937) das folgende Ergebnis.

Satz 1. *Gilt*

$$N(x) = Ax + \mathrm{O}\left(x \log^{-\gamma} x\right) \qquad (x \to \infty)$$

mit $A > 0$, $\gamma > 2$, so folgt

$$\pi_{\mathcal{N}}(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty).$$

Beurling zeigte dies sogar für $\gamma > 3/2$; diese Grenze ist scharf.

Die üblichen Beweise (z.B. Bateman und Diamond 1969) verwenden einen Taubersatz vom Ikehara-Landau-Typ. Ich verwende einen Satz von Newman (1980) in der Form von Korevaar (1982):

Satz 2. *Sei $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ beschränkt, so daß*

$$G(z) := \int_0^\infty F(t) e^{-zt}\, dt$$

auf $\Re z > 0$ existiert und holomorph ist. Sei ferner

(1) *$G(z)$ stetig fortsetzbar in $z = 0$ und*

(2) *$\big(G(z) - G(0)\big)/z$ stetig fortsetzbar auf $\Re z = 0$.*

Dann existiert

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = G(0).$$

Daraus folgt Satz 1 durch Anwendung auf $F(t) = e^{-t}\psi_{\mathcal{N}}(e^t) - 1$ (diese Funktion ist beschränkt nach der Tschebyscheff-Ungleichung für g-Zahlen). Es ist

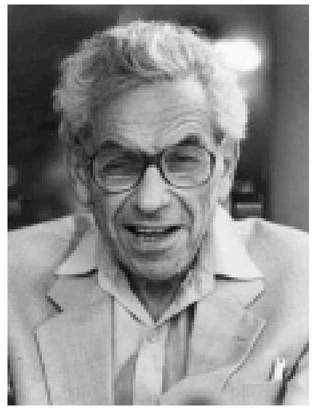
$$G(z) = \frac{1}{z+1}\left(- \frac{\zeta'_{\mathcal{N}}(z+1)}{\zeta_{\mathcal{N}}(z+1)} - \frac{1}{z}\right)$$

mit der analog zur Riemannschen Zetafunktion über $\mathcal{N}$ definierten Funktion $\zeta_{\mathcal{N}}(s)$. Die Voraussetzungen von Satz 2 lassen sich durch partielle Summation von $\zeta_{\mathcal{N}}$ nachprüfen.

Es besteht Aussicht, diese Methode auch im Bereich $3/2 < \gamma \le 2$ erfolgreich anzuwenden. Dazu ersetze man Bedingung (2) durch Konvergenz im quadratischen Mittel (L^2-Norm) und gehe im Beweis von Bateman und Diamond von $G(z)$ über zu $\big(G(z) - G(0)\big)/z$. Die Abschätzung des Integrals parallel und nahe der imaginären Achse steht dabei noch aus.

Ein Problem von Erdös: Summen von zwei quadratvollen Zahlen

Valentin Blomer, Stuttgart



P. Erdös

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt quadratvoll, wenn für alle Primzahlen p aus $p \mid n$ stets $p^2 \mid n$ folgt. Erdös stellte das Problem, die Anzahl $V(x)$ aller Zahlen $\leq x$ abzuschätzen, die Summe zweier quadratvoller Zahlen sind, und vermutete in Analogie zu Landaus Zwei-Quadrate-Satz, daß $V(x) \asymp x(\log x)^{-1/2}$ gilt. Es wird gezeigt, daß diese Vermutung falsch ist:

Satz 1. *$V(x) \gg x(\log x)^{-0.253}$.*

Dies ist zu vergleichen mit der oberen Schranke $V(x) \ll_\epsilon x(\log x)^{-1/6+\epsilon}$ von Baker und Brüdern und der unteren Schranke

$$V(x) \gg \frac{x}{(\log x)^{1/2}} \exp\left(\frac{\beta \log\log x}{\log\log\log x}\right)$$

mit einer Konstanten $\beta > 0$ von Odoni, deren Beweis allerdings nicht korrekt ist.

Zum Beweis von Satz 1 wird das Problem aufgefasst als eine untere Abschätzung für die Anzahl aller Zahlen $\leq x$, die durch wenigstens eine der quadratischen Formen $x_1^2 + p^3 x_2^2$ ($p \leq P$ prim, P eine geeignete Potenz von $\log x$) dargestellt werden, da sich jede quadratvolle Zahl m eindeutig als $m = a^3 b^2$ mit quadratfreiem a schreiben lässt. Tatsächlich folgt Satz 1 ohne Mühe aus

Satz 2. *Für die Anzahl $U_F(x)$ aller Zahlen $\leq x$, die durch eine gegebene primitive positiv-definite quadratische Form $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ der Diskriminante D dargestellt werden, gilt*

$$U_F(x) \gg_\epsilon \frac{x}{|D|^\epsilon (\log x)^{1/2}}$$

gleichmäßig in $|D| \leq (\log x)^{\log 2 - \epsilon}$ *und*

$$U_F(x) \gg_\epsilon \frac{x}{(\log x)^{1+\kappa(\log(2\kappa)-1)+\epsilon}}$$

gleichmäßig in $|D| \leq (\log x)^{2\kappa \log 2 - \epsilon}$ *für jedes* $1/2 \leq \kappa \leq 1/(1 + \log 2) - \epsilon$.

Der entscheidende Punkt ist hier die geforderte Gleichmäßigkeit der Abschätzungen. Der Beweis von Satz 2 benutzt klassische Techniken der multiplikativen Zahlentheorie (Perron-Formel, Satz von Siegel-Walfisz in quadratischen Zahlkörpern u. ä.), Ergebnisse aus der Gruppentheorie und elementare Abschätzungen der unvollständigen Gamma-Funktion.

Asymptotische Formeln für verschiedene Partitionenanzahlen

Kathrin Bringmann, Würzburg

L. Euler

Für $p, l \in \mathbb{N}, p > 0, n \in \mathbb{N}_0$ sei

- $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n,
- $q_p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n mit nicht durch p teilbaren Summanden und
- $Q_p^l(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n mit nicht durch p teilbaren Summanden, wobei jeder Summand maximal l Mal vorkommen darf.

Sei ferner $p(0) := q_p(0) := Q_p^l(0) := 1$. Mein Ziel war es, asymptotische Formeln für $q_p(n)$ und $Q_p^l(n)$ zu beweisen (für $p(n)$ sind solche bekannt). Dazu benötigte ich die erzeugenden Funktionen $F(q)$ von $p(n)$, $F_p(q)$ von $q_p(n)$ und $G_p^l(q)$ von $Q_p^l(n)$, die im Inneren des Einheitskreises holomorph sind.

Da man bei der Herleitung asymptotischer Formeln Aussagen auf dem Rand des Einheitskreises machen möchte, wo aber die Produktdarstellungen der erzeugenden Funktionen sehr schlecht konvergieren, ist es hilfreich, zunächst Transformationsformeln für diese zu beweisen. Ich konnte zeigen:

Satz 1.

$$F_p\left(\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{p_1}}\omega_p(h,k)\exp\left(\frac{\pi(p-1)z}{12k} + \frac{\pi(p_1-d_1)}{12kp_1z}\right) \times J_p^k\left(\exp\left(\frac{2\pi i g'}{k} - \frac{2\pi}{kp_1z}\right)\right)$$

Hierin sei $(p,k) = d_1$, $k > 0$, $p = d_1p_1$, $k = d_1k_1$ *und* g' *sei durch* $p_1hg' \equiv -1 \pmod{k_1}$ *definiert. Ferner sei* $\omega_p(h,k) := \omega(h,k)/\omega(p_1h,k_1)$, $\omega(h,k) := \exp(\pi i\sigma(h,k))$, *mit* $\sigma(h,k) := \sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\!\left(\frac{\mu}{k}\right)\!\right)\left(\!\left(\frac{h\mu}{k}\right)\!\right)$, $J_p^k(x) := F\big(x^{p_1}\exp(2\pi i r/d_1)\big)/F\big(x^{d_1}\big)$, *wobei* r *definiert sei durch* $h' = p_1g' + rk_1$.

Satz 2.

$$G_p^l\left(\exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k}\right)\right) = \sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\omega_p^l(h,k)\exp\left(-\frac{\pi(p-1)lz}{12k} + \frac{\pi}{12kp(l+1)z}((p-d_1^2)(l+1)-(p-d_3^2)d_2^2\right) H_p^l\left(\exp\left(\frac{2\pi i g^*}{p_1k} - \frac{2\pi}{p_1p_3l_2kz}\right)\right)$$

Hierin sei $(h,k)=1$, $k>0$, $(p,k)=d_1$, $p=p_1d_1$, $k=k_1d_1$, $(l+1,k)=d_2$, $l+1=d_2l_2$, $k=k_2d_2$, $(k_2,p)=d_3$, $k_2=d_3k_3$, $p=d_3p_3$ *und* g^* *sei definiert durch* $p_3l_2hg^*\equiv -1 \pmod{k_3}$. *Ferner sei* $\omega_p^l(h,k):=\omega_p(h,k)/\omega_p(l_2h,k_2)$, $H_p^l(x):=J_p^k\big(x^{p_3l_2}\exp(2\pi i\lambda/(p_1d_3))\big)/J_p^{k_2}\big(x^{p_1d_2}\big)$, *wobei* λ *definiert ist durch* $p_1g'=p_3l_2g^*+\lambda k_3$.

Für $z\to 0$ erhält man Informationen auf dem Rand des Einheitkreises: F_p und G_p^l verhalten sich wie gewisse Exponentialfunktionen, wobei der Exponent von p, k und l abhängt.

Damit gelang es mir, unter Verwendung von Besselfunktionen und der Theorie der Modulformen, folgende asymptotische Formeln zu zeigen:

Satz 3.

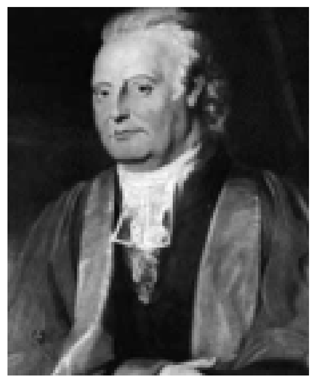
$$q_p(n)=\frac{2(p-1)^{\frac14}\sqrt{3}}{p^{\frac34}(p-1+24n)^{\frac34}}\exp\left(\frac{\pi(p-1+24n)^{\frac12}(p-1)^{\frac12}}{6\sqrt{p}}\right)\left(1+O\left(n^{-\frac12}\right)\right)$$

Satz 4.

$$Q_p^l(n)=\frac{2(p-1)^{\frac14}\sqrt{3}l^{\frac14}}{(l+1)^{\frac14}p^{\frac14}(24n-(p-1)l)^{\frac34}}\exp\left(\frac{\pi(24n-(p-1)l)^{\frac12}(p-1)^{\frac12}\sqrt{l}}{6\sqrt{p(l+1)}}\right)\left(1+O\left(n^{-\frac12}\right)\right)$$

Systeme kubischer Formen

Jörg Brüdern, Stuttgart



E. Waring

Für die Darstellungsanzahl

$$R_s(n)=\#\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^s:\sum_{i=1}^{s}x_1^3=n\big\}$$

im Waringschen Problem für Kuben wird für $s\geq 4$ die asymptotische Formel

$$R_s(n)=\frac{\Gamma(4/3)^s}{\Gamma(s/3)}\,\mathfrak{S}_s(n)\,n^{(s/3)-1}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)\qquad(n\to\infty)$$

mit der singulären Reihe $\mathfrak{S}_s(n)$ (welche $1\ll\mathfrak{S}_s(n)\ll(\log\log n)^c$ genügt) vermutet, doch bekannt ist ein solches Resultat nur für $s\geq 8$. Für kleinere s wurde die Formel nur im quadratischen Mittel bestätigt; so zeigte Vaughan (1986) für $\epsilon>0$, daß

$$\sum_{n\leq N}\big|R_4(n)-\Gamma(4/3)^3\mathfrak{S}_4(n)n^{1/3}\big|^2\ll N^{5/3}(\log N)^{\epsilon-3}.$$

In Zusammenarbeit mit T.D. Wooley wurden nun höhere Momente solcher Fehlerterme untersucht; unter Anderem ergaben sich die folgenden Resultate.

Satz 1. *Es gelten*

$$\sum_{n\le N} \big|R_5(n) - \Gamma(4/3)^5\,\Gamma(5/3)^{-1}\mathfrak{S}_5(n)\,n^{2/3}\big|^3 \ll N^3(\log N)^{\epsilon-3},$$

$$\sum_{n\le N} \big|R_6(n) - \frac{\Gamma(4/3)^6}{\Gamma(2)}\,\mathfrak{S}_6(n)\,n\big|^5 \ll N^6(\log N)^{\epsilon-4}.$$

Im Falle ungerader Momente kann alternativ auch das Vorzeichen berücksichtigt werden. Gelegentlich lassen sich dann weitere Auslöschungen sichtbar machen.

Satz 2. *Es gelten*

$$\sum_{n\le N} \big(R_5(n) - \frac{\Gamma(4/3)^5}{\Gamma(5/3)}\,\mathfrak{S}_5(n)\,n^{2/3}\big)^3 \ll N^{35/12+\epsilon}$$

und

$$\sum_{n\le N} R_5(n)^3 = CN^3 + \mathrm{O}\big(N^{35/12+\epsilon}\big).$$

Diese beiden Aussagen sind im Wesentlichen äquivalent. In Satz 2 läßt sich der Titel des Vortrags am leichtesten erklären, denn die Summe $\sum_{n\le N} R_5(n)^3$ gleicht der Lösungsanzahl des Systems kubischer Gleichungen

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = y_1^3 + \cdots + y_5^3 = z_1^3 + \cdots + z_5^3 \le N.$$

Dieses System wird mit einer dreidimensionalen (sic!) Version der Kreismethode behandelt, was dann Satz 2 liefert. Die Beweisidee für Satz 1 ist anders: Mit

$$f(x) = \sum_{x\le N^{1/3}} e(\alpha x^3)$$

und einer geeigneten Wahl von „minor arcs“ $\mathfrak{m}$ sieht man zunächst leicht

$$R_5(\alpha) - \frac{\Gamma(4/3)^5}{\Gamma(5/3)}\,\mathfrak{S}_5(n)\,n^{2/3} = \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^5 e(-\alpha n)d\alpha + \mathrm{O}\big(N^{(1/2)+\epsilon}\big).$$

In der nun verbleibenden Summe

$$\sum_{n\le N} \Big|\int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^5 e(-\alpha n)d\alpha\Big|^3$$

lassen sich „kleine Summanden“ ad hoc behandeln. Ist

$$\mathcal{N} = \Big\{n \le N : \Big|\int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^5 e(-\alpha n)d\alpha\Big| < N^\lambda\Big\},$$

dann zeigt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n\le N:\, n\in\mathcal{N}} \Big|\int_{\mathfrak{m}}\Big|^3 \le N^\lambda \sum_{n\le N}\Big|\int_{\mathfrak{m}}\Big|^2 \le N^\lambda \int_{\mathfrak{m}} \big|f(\alpha)\big|^{10} d\alpha;$$

für nicht zu große λ erhält man so mit Standardmethoden befriedigende Resultate. Große Summanden sind selten: ist $\mathcal{Z} = \{n \le N : \big| \int_{\mathfrak{m}} \big| \ge N^\lambda\}$, dann ist für jedes $n \in \mathcal{Z}$ und geeignetes $k_n \in \mathbb{C}$ mit $|k_n| = 1$ sicher

$$k_n \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^5 e(-\alpha n) d\alpha \ge N^\lambda;$$

mit

$$K(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} k_n \, e(-\alpha n)$$

folgt

$$\#\mathcal{Z} N^\lambda = \int_{\mathfrak{m}} K(\alpha) f(\alpha)^5 d\alpha.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung ergibt sich dann

$$\#\mathcal{Z} N^\lambda \le \Big(\int_0^1 |Kf|^2 d\alpha \Big)^{1/6} \Big(\int_0^1 |K|^2 d\alpha \Big)^{1/3} \Big(\int_{\mathfrak{m}} |f|^{8+(4/3)} d\alpha \Big)^{1/2}.$$

Das mittlere Integral gleicht $\#\mathcal{Z}$, das letzte ist Standardmethoden zugänglich. Mit Resultaten von Heath–Brown über „Taxicabnumbers“ zeigt man

$$\int_0^1 \big| f(\alpha) K(\alpha) \big|^2 d\alpha \ll N^{(4/9)+\epsilon} \#\mathcal{Z} + (\#\mathcal{Z})^2.$$

Diese Ungleichung genügt zum Beweis des Satzes 1; dabei ist entscheidend, daß der Term $(\#\mathcal{Z})^2$ frei von einem Faktor N^ϵ ist.

Diese neue Methode zum Zählen großer Fourierkoeffizienten hat vielfältige Anwendungen über das Waringsche Problem hinaus.

Kleine Lösungen additiver Kongruenzen

Rainer Dietmann, Stuttgart

H. Weyl

Wir betrachten Kongruenzen der Form

$$a_1x_1^k + \ldots + a_sx_s^k \equiv 0 \pmod{m} \tag{1}$$

und suchen Abschätzungen für die kleinste nichttriviale Lösung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s, m) = 1$ gelingt uns für relativ kleine Variablenzahl s die Abschätzung

$$0 \leq x_i \ll_{s,k,\epsilon} m^{1/k+\epsilon} \quad (1 \leq i \leq s) \tag{2}$$

für die kleinste Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s \backslash \{0\}$ von (1). Für große k kann dabei $s \sim k \log k$ gewählt werden. Es ist klar, daß hierbei $1/k$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann, der Exponent ist im Wesentlichen also scharf. Der Beweis dieses Resultats verwendet das große Sieb, Mittelwertsätze für Exponentialsummen und die Weylsche Ungleichung.

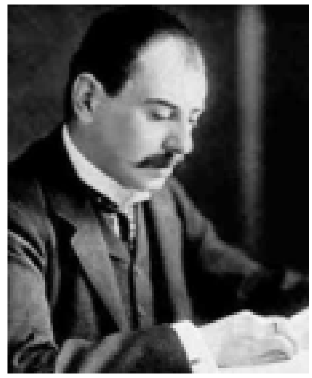
Mit ganz anderen, nämlich kombinatorisch-geometrischen Methoden, gelingt uns im kubischen Fall eine neue Abschätzung für die kleinste nichttriviale Lösung von (1), die ohne die Voraussetzung $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s, m) = 1$ auskommt: Für ungerades s und $k = 3$ hat (1) eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s \backslash \{0\}$ mit

$$|x_i| \leq m^{1/2+1/(2s)} \quad (1 \leq i \leq s). \tag{3}$$

Das verbessert im Spezialfall $k = 3$ ein Resultat von R.C. Baker. Eine weitere Verbesserung der Abschätzung (3) läßt sich erzielen, indem man die geometrische Methode mit der analytischen Methode kombiniert, die zu (2) führte. Diese Vorgehensweise liefert auch im quadratischen Fall $k = 2$ neue Resultate.

Neues über Summen von zwei Quadraten

Christian Elsholtz, Clausthal



E. Landau

In unserem Vortrag betrachten wir verschiedene Aspekte des Zweiquadratesatzes: die Spannweite dieser Aspekte reicht von einer didaktischen Bemerkung, Zerlegungseigenschaften von Mengen, graphentheoretischen Resultaten, Siebmethoden, bis hin zu möglichen Anwendungen bei Telekommunikationsproblemen.

1. Zunächst stellen wir einen Beweis des Zweiquadratesatzes vor, der einfacher ist als jener im Buch von Aigner und Ziegler nach Heath-Brown und Zagier.

2. Wir geben eine kleine Verbesserung eines Ergebnisses von Erdös und Sárközy an für unendliche Mengen $\mathcal{A}$ mit Eigenschaft P (dies sind Mengen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_i \nmid a_j + a_k$ für $a_i < a_j < a_k$). Die Mengen

$$\mathcal{A}_r = \{n^2 : \omega(n) = \Omega(n) = r \text{ und } (p \mid n \Rightarrow p \equiv 3 \bmod 4)\}$$

haben Eigenschaft P und Anzahlfunktion

$$\mathcal{A}_r(N) \sim c_r \frac{N^{\frac{1}{2}}}{\log N} (\log\log N)^{r-1}.$$

Dies verallgemeinert die Konstruktion von Erdös und Sárközy, die den Fall $r = 1$ betrachten.

3. Mittels Ergebnissen der extremalen Graphentheorie kann man als Korollar zu dem Ergebnis von Friedlander und Iwaniec über Primzahlen der Form x^2+y^4 zeigen, dass es „große“ Mengen $\mathcal{A}$ von Quadraten und $\mathcal{B}$ von vierten Potenzen gibt, so daß alle $a + b \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$ prim sind. Zum Beispiel kann man $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \{1, \ldots, N\}$ so wählen, daß $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \geq \log N/(2 \log\log N)$ gilt. Für Mengen ohne die Einschränkung auf Quadrate und vierte Potenzen ist bekannt (Pomerance, Sárközy und Stewart), daß man solche Mengen um etwa einen Faktor von 2 größer wählen kann.

4. Nach einem Ergebnis von Wirsing können die meisten Mengen nicht asymptotisch zerlegt werden. Analog scheint es plausibel zu sein, daß fast alle Mengen, die eine Zerlegung zulassen, nur auf eine Weise zerlegt werden können. Wir geben ein Beispiel für eine unendliche Menge an, die zwei Zerlegungen hat. Sei $p \equiv 1 \bmod 4$ prim. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Quadrate und $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{p^2\}$. Dann ist $\mathcal{A} + \mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathcal{A}'$.

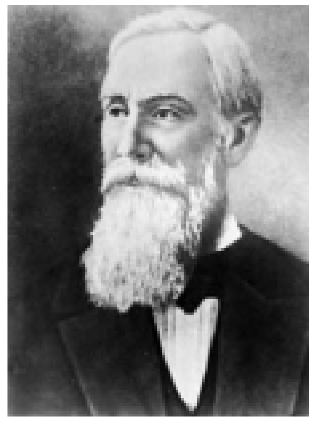
Man kann Ergebnisse des Autors über additive Zerlegungen der Menge der Primzahlen auf Mengen übertragen, die nur aus bestimmten Primfaktoren bestehen. Es sei z.B. $\mathcal{Q}_{4,1} = \{n \in \mathbb{N} : p \mid n \Rightarrow p \equiv 1 \bmod 4\}$. Mittels Siebmethoden kann man zeigen, daß es keine vier Mengen $\mathcal{A}_i$ mit $|\mathcal{A}_i| \geq 2$ gibt, wobei $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$ bis auf endlich viele Fehler mit der Menge $\mathcal{Q}_{4,1}$ übereinstimmt.

5. Ergebnisse des Autors über die Primzahl k-tupel-Vermutung für großes, wachsendes k können ebenfalls übertragen werden. Sei z.B. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \{1, \ldots, N\}$ und $\mathcal{A}+\mathcal{B} \subset \mathcal{Q}_{4,1}$. Sei weiter $\mathcal{A}(N) \gg (\log N)^r$, $r > 1$, so gilt $\mathcal{B}(N) \ll N^{1/2+\epsilon_r}$. Andererseits ist mit $\mathcal{A} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{B} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}, p \mid n \Rightarrow p \equiv 1 \bmod 4\}$ auch $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset \mathcal{Q}_{4,1}$ und $\mathcal{A}(N) = N^{1/2+o(1)}$ und $\mathcal{B}(N) = N^{1/2+o(1)}$. Dies zeigt, daß dieses Sieb in bestimmten Bereichen nahezu optimal ist.

6. Abschließend zeigen wir, daß man große Mengen von Gitterpunkten in $\mathbb{Z}^2$ wählen kann, so daß alle Punkte vom Nullpunkt verschiedenen Abstand haben, die Steigungen vom Nullpunkt aus gemessen verschieden sind, das Verhältnis der Abstände irrational ist, und die Punkte eine Blockstruktur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ haben. Dies könnte Anwendungen in der Telekommunikation haben.

Über ein Problem von Tschebyscheff in algebraischen Zahlkörpern

Jürgen Hinz, Marburg



P. Tschebyscheff

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n = r_1 + 2r_2$ (in der üblichen Schreibweise). Z_K stehe für den Ring der ganzen Zahlen in K. Die Konjugierten einer Zahl $\alpha \in Z_K$ werden mit $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ bezeichnet. Für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gelte $x_k = x_{k+r_2}$, $k = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$.

Es sei $F \in Z_K[t]$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $g > 1$. In Verallgemeinerung einer Fragestellung von Tschebyscheff werden Primidealteiler $\mathfrak{p}_x$ maximaler Norm des Produkts $\prod F(\alpha)$ untersucht, wobei α über alle Zahlen aus Z_K läuft mit $|\alpha^{(k)}| \leq x_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Die Ausdehnung einer Methode von Erdös auf Zahlkörper führt zu der Abschätzung

$$N\mathfrak{p}_x \ > \ x \ (\log x)^{c \cdot \log\log\log x}$$

mit einer Konstanten $c = c(F, K) > 0$ unter der Voraussetzung, daß alle x_k hinreichend groß sind. Das obige Resultat läßt sich verschärfen zu

$$N\mathfrak{p}_x \ > \ x \ \exp((\log x)^a) \qquad \text{mit beliebigem} \quad 0 < a < 2 - \log 4 \ .$$

Zum Beweis dieser unteren Schranke müssen nach einer Idee von Tenenbaum Aussagen über die Hooleysche Δ-Funktion (für Polynome) auf Zahlkörper verallgemeinert werden.

Ersetzt man in dem Produkt $\prod F(\alpha)$ die ganzen Zahlen $\alpha \in Z_K$ durch algebraische Primzahlen $\omega \in Z_K$, so gilt – in total reellen Zahlkörpern – für die Norm eines „maximalen“ Primidealteilers $\mathfrak{p}_x$ dieses Produkts $\prod F(\omega)$ die Abschätzung

$$N\mathfrak{p}_x \ > \ x^{b_0 - \epsilon}$$

für jedes $\epsilon > 0$ mit $b_0 = 1 - 1/2 \exp(-g/2 + 1/4)$.

Eine neue Methode in der probabilistischen Zahlentheorie

Karl–Heinz Indlekofer, Paderborn

M. Stone, E. Čech

Ausgehend von einem „klassischen“ Problem der probabilistischen Zahlentheorie, unter welchen Voraussetzungen der Mittelwert einer zahlentheoretischen Funktion (falls er existiert) als Integral in einem geeigneten Maßraum darstellbar ist, werden kurz die Räume der fastgeraden Funktionen von Schwarz und Spilker, die grenzperiodischen (vgl. Novoselov) und fastperiodischen Funktionen (Delsarte, Wintner, Cohen, Mauclaire) vorgestellt. Diese Räume sind vom zahlentheoretischen Standpunkt „klein“ , da sie z.B. nicht die Möbius–Funktion enthalten. Wir stellen eine Integrationstheorie auf $\mathbb{N}$ vor, die auf der folgenden Charakterisierung der Stone–Čech–Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ beruht: Für jede Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist das Mengensystem

$$\bar{\mathcal{A}} := \{\bar{A} \subset \beta\mathbb{N} : \bar{A} = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(A) \text{ für } A \in \mathcal{A}\}$$

eine Algebra in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bei gegebener Algebra $\mathcal{A}$ in $\mathbb{N}$ und einem dazugehörigen Inhalt δ auf $\mathcal{A}$ gehen wir über zu $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\delta}$ mit $\bar{\delta}(\bar{A}) = \delta(A)$, und hier ist $\bar{\delta}$ ein Prämaß. Wir skizzieren eine Integrationstheorie, insbesondere an dem Beispiel der durch $A_{p^h} := \{n \in \mathbb{N} : p^h|n\}$ (p prim, $h \in \mathbb{N}$) erzeugten Algebra. Hier ist $\delta(A)$ die asymptotische Dichte von A. Wir zeigen, daß der durch geeigneten Abschluß der Treppenfunktionen auf $\mathcal{A}$ erhaltene Raum zahlentheoretischer Funktionen z.B. die Möbius–Funktion enthält. Die Abschlüsse implizieren neue, elementare Beweise der Sätze von Wirsing, Halász und Delange für multiplikative Funktionen f mit $|f| \leq 1$.

Etaprodukte und rationale Simplizes

Günter Köhler, Würzburg

C.L. Siegel

Ein Etaprodukt

$$f(z) = \prod_{m|N} \eta(mz)^{a(m)}, \qquad a(m) \in \mathbb{Z},$$

mit der Dedekindschen Etafunktion

$$\eta(z) = e\left(\frac{z}{24}\right) \prod_{n} (1 - e(nz)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n}\right) e\left(\frac{n^2 z}{24}\right),$$

transformiert sich wie eine Modulform vom Gewicht $k = (1/2) \sum_{m|N} a(m)$ zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ aller ganzzahligen Transformationen $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ mit $ad-bc = 1$ und $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ N)$. Im Fall $a(m) = a(m/N)$ für alle $m|N$ liegt entsprechendes Transformationsverhalten zu der von $\Gamma_0(N)$ und $z \mapsto -1/(Nz)$ erzeugten Fricke-Gruppe $\Gamma^*(N)$ vor. Viele Etaprodukte oder Linearkombinationen von Etaprodukten sind Heckesche Eigenformen, und manche sind zugleich Heckesche Thetareihen zu imaginär-quadratischen Körpern. Ein Beispiel ist

$$\frac{\eta(z)\eta^3(4z)}{\eta(2z)\eta(8z)} \pm i\sqrt{2}\frac{\eta^3(2z)\eta(8z)}{\eta(z)\eta(4z)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu \in R_2} \chi(\mu) e\Big(\frac{1}{8}\mu\bar{\mu}z\Big),$$

wobei χ ein Charakter der Periode 8 auf $R_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist. Ein Etaprodukt f ist genau dann eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$, wenn f in den Spitzen holomorph ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu einem System von $\sigma_0(N)$ linearen Ungleichungen in den $\sigma_0(N)$ Variablen $a(m)$ von der Gestalt

$$\sum_{m|N} \frac{\mathrm{ggT}(m,c)^2}{m} \cdot a(m) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad c|N.$$

Bei festem k kann man eine der Variablen, etwa $a(N)$, durch die übrigen ausdrücken, und die Ungleichungen definieren ein kompaktes Simplex $S^0(N,k)$ im Raum $\mathbb{R}^D$ mit der Dimension $D = \sigma_0(N) - 1$. Für die Etaprodukte vom Gewicht k zu $\Gamma^*(N)$ erhält man analog ein Simplex $S^*(N,k)$ in $\mathbb{R}^l$ mit $l = \lfloor(\sigma_0(N) - 1)/2\rfloor$. Will man alle solchen Etaprodukte auflisten, dann braucht man eine Liste aller Punkte in $S^*(N,k) \cap \mathbb{Z}^l$. Es besteht daher Interesse an effizienten Algorithmen, die eine solche Liste liefern. Der beste mir bekannte Algorithmus nutzt die Konvexität der Simplizes, aber die Rechenzeit verdoppelt sich ungefähr, wenn sich die Dimension l um 1 erhöht, und ich bin in Computerrechnungen nicht über $l = 13$ hinausgekommen. Ein Beispiel mit $l = 13$ ist $S^*(900,1)$ mit dem Volumen $3^{14} \cdot 5^7/(2^{28} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) = 1,390\ldots$ und mit 127 ganzzahligen Punkten.

Summenformeln in der analytischen Zahlentheorie

Ekkehard Krätzel, Wien

G.F. Voronoi

Es werden Verallgemeinerungen der Euler–Maclaurinschen und der Poissonschen Summenformel gegeben.

Es sei E_p ein p–dimensionales zentralsymmetrisches Ellipsoid mit der Distanzfunktion $F_p(\mathbf{t}), \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$, und der Stützfunktion $H_p(\mathbf{u}), \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$. Dann ist $F_p^2(\mathbf{t})$ durch eine positiv–definite quadratische Form

$$F_p^2(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} t_i t_j, \qquad \det(a_{ij}) = d_p$$

dargestellt und $H_p(\mathbf{u})$ demzufolge durch

$$H_p^2(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} A_{ij} u_i u_j,$$

worin A_{ij} die Adjunkten zu a_{ij} bedeuten. Es bezeichne

$$A(x; E_p) := \#\big\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^p : F_p^2(\mathbf{n}) \le x\big\}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots n_p),$$

die Anzahl der Gitterpunkte in dem durch $\sqrt{x}$ dilatierten Ellipsoid E_p. Weiter sei

$$A_\nu(x; E_p) := \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{F_p^2(\mathbf{n}) \le x} \big(x - F_p^2(\mathbf{n})\big)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \nu \ge 0.$$

Es ist

$$A_\nu(x; E_p) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2+\nu+1)\sqrt{d_p}}\, x^{p/2+\nu} + \Delta_\nu(x; E_p),$$

worin sich der Rest für $\nu > (p-1)/2$ durch eine absolut konvergente Reihe über Besselfunktionen darstellen läßt:

$$\Delta_\nu(x; E_p) = \frac{1}{\pi^\nu \sqrt{d_p}}\, x^{p/4+\nu/2} \sum_{\mathbf{n} \ne \mathbf{0}} \frac{J_{p/2+\nu}(2\pi H_p(\mathbf{n})\sqrt{x})}{H_p(\mathbf{n})^{p/2+\nu}}$$
$$\ll x^{(p-1)/4+\nu/2}.$$

Diese Entwicklung ergibt sich aus Untersuchungen von E. Landau.

Es sei $\rho = [(p+1)/2]$ und $f(t)$ sei $(\rho+1)$–mal stetig differenzierbar in $[a,b]$. Im ersten Teil des Vortrags wird die verallgemeinerte Euler–Maclaurinsche Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{a<F_p^2(\mathbf{n})\le b} f\big(F_p^2(\mathbf{n})\big) &= \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)\sqrt{d_p}} \int_a^b t^{p/2-1} f(t)\,dt \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\rho} (-1)^\nu \big\{ f^{(\nu)}(b)\Delta_\nu(b;E_p) - f^{(\nu)}(a)\Delta_\nu(a;E_p)\big\} \\ &+ (-1)^{\rho+1} \int_a^b f^{(\rho+1)}(t)\Delta_\rho(t;E_p)\,dt\end{aligned}$$

und die verallgemeinerte Poissonsche Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{a<F_p^2(\mathbf{n})\le b} f\big(F_p^2(\mathbf{n})\big) &= \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)\sqrt{d_p}} \int_a^b t^{p/2-1} f(t)\,dt \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\rho-1} (-1)^\nu \big\{ f^{(\nu)}(b)\Delta_\nu(b;E_p) - f^{(\nu)}(a)\Delta_\nu(a;E_p)\big\} \\ &+ \frac{(-1)^\rho}{\pi^{\rho-1}\sqrt{d_p}} \sum_{\mathbf{n}\ne\mathbf{0}} \frac{1}{H_p(\mathbf{n})^{p/2+\rho-1}} \int_a^b t^{p/4+(\rho-1)/2} f^{(\rho)}(t) J_{p/2+\rho-1}(2\pi H_p(\mathbf{n})\sqrt{t})\,dt\end{aligned}$$

vorgestellt. Im Spezialfall $a=0, b\to\infty$ gilt unter der Voraussetzung

$$f^{(\nu)}(x) \ll x^{-p/2-\nu-\epsilon} \qquad \text{für } \nu = 0,1,\dots,\rho,\ \epsilon>0,\ x\to\infty$$

sogar

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{n}} f\big(F_p^2(\mathbf{n})\big) &= \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)\sqrt{d_p}} \int_a^b t^{p/2-1} f(t)\,dt \\ &+ \frac{\pi}{\sqrt{d_p}} \sum_{\mathbf{n}\ne\mathbf{0}} \frac{1}{H_p(\mathbf{n})^{p/2-1}} \int_0^\infty t^{p/4-1/2} f(t) J_{p/2-1}(2\pi H_p(\mathbf{n})\sqrt{t})\,dt.\end{aligned}$$

Im zweiten Teil wird das Gitterpunktproblem $A_{\rho-1}(x;E_p)$ betrachtet. Es ergibt sich

$$\Delta_{\rho-1}(x;E_p) \ll x^{2p/3-1}$$
$$\Delta_{\rho-1}(x;E_p) = \Omega\big(x^{p/2-3/4}\big)$$

für gerade p und

$$\Delta_{\rho-1}(x;E_p) \ll x^{(p-1)/2}\log x$$
$$\Delta_{\rho-1}(x;E_p) = \Omega\big(x^{(p-1)/2}\big)$$

für ungerade p. Mit Hilfe einer sich aus der verallgemeinerten Poissonschen Summenformel ergebenden Identität für Besselfunktionen ergibt sich die folgende Darstellung für den Gitterrest: Sei die Distanzfunktion des Ellipsoids E_p gegeben durch

$$F_p^2(m,\mathbf{n}) = am^2 + F_{p-1}^2(\mathbf{n})$$

mit $a > 0, \mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{p-1})$. Dann gilt

$$A_{\rho-1}(x; E_p) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2+\rho)\sqrt{ad_{p-1}}}\, x^{p/2+\rho-1} + \Delta_{\rho-1}(x; E_p)$$

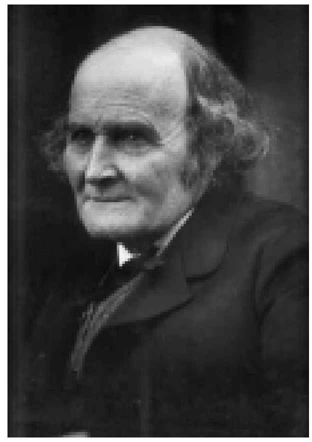
mit

$$\Delta_{\rho-1}(x; E_p) = \frac{x^{p/4+(\rho-1)/2}}{\pi^{\rho-1}\sqrt{ad_{p-1}}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m^2+|\mathbf{n}|^2>0} \frac{J_{p/2+\rho-1}\big(2\pi\sqrt{x(m^2/a^2 + H_{p-1}^2(\mathbf{n}))}\big)}{(m^2/a^2 + H_{p-1}^2(\mathbf{n}))^{p/4+(\rho-1)/2}},$$

wobei $|\mathbf{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{p-1}^2$. Dies verallgemeinert eine Identität von E. Landau für den Kreis, bei dem $a = 1,\ p = 2,\ H_1^2(\mathbf{n}) = n^2$ gilt.

Zur Verteilung der Quadrate ganzer Oktaven

Gerald Kuba, Wien



A. Cayley

Motiviert durch eine Arbeit von Müller und Nowak [4] über die Verteilung der Potenzen ganzer Gaußscher Zahlen wurde in [1] und [4] die Frage nach der Verteilung der Quadrate ganzer Quaternionen abgehandelt. Diese Fragestellung soll nun auf die Cayleyschen Oktaven ausgedehnt werden. Es sei dazu $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ die Cayley-Algebra und Γ ein (nicht-assoziativer) Teilring, der im Sinne von Hurwitz und Dickson einen Ganzheitsbereich bildet, sodaß also insbesondere $\Gamma \subset (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^8$ gilt. Der Einfachheit halber formulieren wir unsere Ergebnisse nur für den Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^8$.

Für einen kompakten Grundbereich $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^8$ und einen großen reellen Parameter X sei

$$A(X) := \#\{a^2 \mid a \in \Gamma \wedge a^2 \in X \cdot \mathcal{G}\}.$$

Unter Berücksichtigung der speziellen Rolle des Imaginärraums $\{0\} \times \mathbb{R}^7$ der Algebra $\mathbb{O}$ im Zusammenhang mit der Quadratbildung gilt für $X \to \infty$

$$A(X) = \#\big(\sqrt{X} \cdot \mathcal{G}^* \ \cap\ \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^7\big) \ +\ O(X)$$

mit $\mathcal{G}^* := \{\, a \in \mathbb{O} \mid a^2 \in \mathcal{G}\,\}$, sodaß die Verteilungsfrage darauf hinausläuft, die Gitterpunkte in dem um den Faktor $\sqrt{X}$ homothetisch dilatierten Bereich $\mathcal{G}^*$ zu zählen. Als Grundbereiche der Verteilung werden die Folgenden betrachtet, die von besonderem Interesse sind, weil sie den verschiedenen klassischen Definitionen der Cayleyschen Oktaven entsprechen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &:= [-1,1]^8 \\
\mathcal{G}_2 &:= \left\{ (x_1,...,x_8) \in \mathbb{R}^8 \;\middle|\; |x_1|, |(x_2,...,x_8)| \le 1 \right\} \\
\mathcal{G}_3 &:= \left\{ (x_1,...,x_8) \in \mathbb{R}^8 \;\middle|\; |(x_1,x_2)|, |(x_3,...,x_8)| \le 1 \right\} \\
\mathcal{G}_4 &:= \left\{ (x_1,...,x_8) \in \mathbb{R}^8 \;\middle|\; |(x_1,...,x_4)|, |(x_5,...,x_8)| \le 1 \right\}
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$ sehr einfache konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^8$, dagegen sind die für die Gitterpunktzählung relevanten Bereiche $\mathcal{G}_1^*$, $\mathcal{G}_2^*, \mathcal{G}_3^*, \mathcal{G}_4^*$ durchwegs nicht konvex und von ziemlich merkwürdiger Gestalt. Unser Resultat lautet nun:

Satz. *Für $\mathcal{G} = \mathcal{G}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ gilt*

$$A(X) = \frac{\mathrm{vol}\,\mathcal{G}_i^*}{2}\,X^4 - \frac{8\pi^3}{105}X^{7/2} + R_i(X),$$

wobei die Fehlerterme $R_i(X)$ für $X \to \infty$ durch $R_2(X) \ll X^3$, $R_4(X) \ll X^{101/32+\epsilon}$ und $R_1(X), R_3(X) \ll X^{3.315}$ abgeschätzt werden können.

[1] G. Kuba, On the distribution of squares of integral quaternions, Acta Arith. 93(2000), 359-372

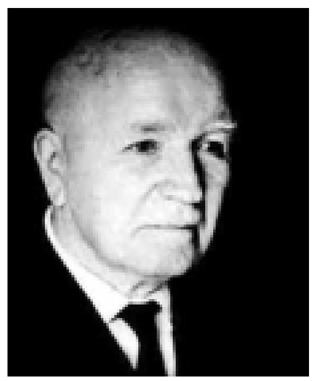
[2] G. Kuba, On the distribution of squares of hypercomplex integers, J. Number Th. 88(2001), 313-334

[3] G. Kuba, On the distribution of squares of integral quaternions II, Acta Arith. 101(2002), 81-95

[4] H. Müller, W.G. Nowak, Potenzen von Gaußschen ganzen Zahlen in Quadraten, Mitt. Math. Ges. Hamburg 18(1999), 119-126

Über die Klassenzahl quadratischer Formen: Untere Abschätzungen für das Restglied

Manfred Kühleitner, Wien



I.M. Vinogradov

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $N(n)$ die Zahl der Äquivalenzklassen positiv definiter quadratischer Formen mit negativer Diskriminante $-n$. C.F. Gauß zeigte die asymptotische Entwicklung

$$A(t) := \sum_{n \le t} N(n) = \frac{\pi}{18}\,t^{3/2} - \frac{1}{4}\,t + E(t)\,.$$

Für den Fehlerterm $E(t)$ wurde kürzlich die obere Abschätzung

$$E(t) \ll t^{21/32+\epsilon}$$

von F. Chamizo und H. Iwaniec (Nagoya Math. J. 151(1998), 199-208) bewiesen. Der Beweis beruht auf der Darstellung von $A(t)$ als dreidimensionales Gitterpunktproblem und einer zugehörigen Funktionalgleichung von T. Shintani (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 22(1975), 22-65). Thema des Vortrages sind untere Abschätzungen für den Fehlerterm $E(t)$, welche sich aus einer neueren Arbeit von K.–M. Tsang (Bull. London Math. Soc. 32(2000), 679-688) über das dreidimensionale Kugelproblem ergeben. Die Ergebnisse lauten

$$E(t) = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{t \log t}\right) .$$

Dichteschranken für σ-freie Mengen

Lutz G. Lucht, Clausthal

J. Knopfmacher

Es sei σ ein nichtleeres System von nichtleeren endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt σ-frei, wenn keine Teilmenge von A zu σ gehört. Mit $\overline{d}(A)$ wird die obere asymptotische Dichte der Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ bezeichnet, mit

$$\overline{d}(\sigma) = \sup\left\{\overline{d}(A) : A \subseteq \mathbb{N}\ \sigma\text{-frei}\right\}$$

die obere asymptotische Dichteschranke für σ-freie Mengen. Für endliche σ-freie Mengen $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet entsprechend $\overline{\tau}(\sigma, n)$ deren maximale Elementeanzahl und

$$\overline{\tau}(\sigma) = \limsup \frac{\overline{\tau}(\sigma, n)}{n}$$

die obere maximale Dichteschranke.

Ruzsa hat 1995 einige Probleme über extremale σ-freie Mengen formuliert, die teilweise bereits 1976 behandelt worden waren. Dabei besteht σ aus den Tripelmengen $\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$ mit $ax + by = cz$ und Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c > a + b$. Seit 2000 gibt es neue Ergebnisse von Schoen sowie Baltz und Schoen.

Der Vortrag berichtet über Methoden und Ergebnisse dieses Teils der kombinatorischen Zahlentheorie. Für $c \geq 2ab\,(a + b)$ und teilerfremde $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a$ gilt

$$\overline{d}(\sigma) = \frac{c^2 - c\,(a + b)}{c^2 - a\,(a + b)} < \overline{\tau}(\sigma).$$

Der Wert von $\overline{\tau}(\sigma)$ wurde bislang nur für $a = b = 1$ bestimmt.

Kreisteilungspolynome, deren Ordnungen viele Primfaktoren enthalten

Helmut Maier, Ulm

E. Galois

Wir beweisen folgendes Resultat: Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es sei Φ_n das n–te Kreisteilungspolynom, $n = p_1 \cdots p_k,\ \mu^2(n) = 1$. Ist dann $k \geq k_0(\epsilon)$, so ist

$$\max_{\alpha \in [0,1]} \left| \Phi_n(e^{2\pi i \alpha}) \right| \geq \exp\left(2^{k(1-\epsilon)/2}\right).$$

Der Beweis besteht aus einer Auswertung des zweiten Moments

$$M_2(n) = \int_0^1 \left(\log |\Phi_n(e(\alpha))|\right)^2 d\alpha$$

und einer Abschätzung des dritten Moments

$$M_3(n) = \int_0^1 \left(\log |\Phi_n(e(\alpha))|\right)^3 d\alpha.$$

Die Abschätzung von $M_3(n)$ wird zurückgeführt auf Summen der Form

$$\sum_{m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 = 0,\, d_i | n} |m_1 m_2 m_3|^{-1}$$

und damit eine Schranke für die Lösungen der Gleichung

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 = 0$$

in Teilern $d_i | n$ für festes (m_1, m_2, m_3).

Letztere Schranke wird durch die Idee der Kugelpackungsschranke aus der Kodierungstheorie erhalten.

Mittelwerte über kurze Intervalle für Restterme in der Gitterpunktlehre

Werner Georg Nowak, Wien

C.F. Gauß

Es sei B ein konvexer ebener Bereich mit hinreichend glattem Rand von nichtverschwindender, beschränkter Krümmung. Nach „Aufblasen" von B um einen großen Parameter t interessiert man sich für die Gitter-Diskrepanz $P_B(t)$ (das ist die Zahl der Gitterpunkte minus Flächeninhalt) von tB. Man kennt dafür obere und untere Abschätzungen und vermutet, daß $P_B(t) \ll t^{1/2+\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$ gilt.

Leitthema des Vortrages ist die Erkenntnis, daß derartige Schranken für Integral-Mittel über viel kürzere Intervalle als bisher bekannt bewiesen werden können. Es genügt, daß $\Lambda = \Lambda(T)$ rascher als $\log T$ wächst, damit

$$\int_{T-\Lambda(T)}^{T+\Lambda(T)} (P_B(t))^2 dt \sim C_B\, \Lambda(T) T$$

gezeigt werden kann (vgl. Arch. Math. 78(2002), 241-248).

Dies kann unter beträchtlich größerem technischem Aufwand auch noch bestätigt werden, wenn der Rand von B nicht glatt ist, sondern „Ecken" besitzt, B also z.B. wie ein „Kronenkorken" aussieht. Dieser Fall tritt auf bei der asymptotischen Abschätzung der Anzahl aller komplexen Zahlen z mit $\max(|\Re(z)|, |\Im(z)|) \leq X$, welche p–te Potenzen von ganzen Gaußschen Zahlen sind. Hier ist X ein großer reeller Parameter und $p \geq 2$ fest.

Schließlich gilt Analoges beim sogenannten Dirichletschen Teilerproblem. Für das Restglied $\Delta(x)$ in der bekannten Darstellung

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x)$$

ergeben sich neben dem Analogon zu Obigem sogar Aussagen für die Momente dritter und vierter Ordnung, wieder über „kurze" Intervalle gemittelt: Es gilt

$$\int_{T-\Lambda(T)}^{T+\Lambda(T)} (\Delta(t^2))^3 dt \sim C_3\, \Lambda(T) T^{3/2}, \qquad \int_{T-\Lambda(T)}^{T+\Lambda(T)} (\Delta(t^2))^4 dt \sim C_4\, \Lambda(T) T^2\,,$$

wenn $\Lambda = \Lambda(T)$ nur rascher als T^β mit einem $\beta > 1/2$ wächst. Letzteres verfeinert Ergebnisse von K.–M. Tsang (Proc. London Math. Soc. (3) 65(1992), 65-82), wo über $[0, T]$ gemittelt wurde.

Werte von Dirichlet-Reihen an ganzzahligen Stellen und kombinatorische Identitäten

Manfred Peter, Freiburg

G.L. Dirichlet

Ist $\{\lambda\}$ das Spektrum des Dirac-Operators auf der Sphäre $\mathcal{S}^{2m+1}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) mit Berger-Metrik zum Parameter $T > 0$, so ist

$$\eta(0) := \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\operatorname{sign} \lambda}{|\lambda|^s}$$

die Eta-Funktion dieser Mannigfaltigkeit. Sie kann holomorph nach 0 fortgesetzt werden und gestattet somit die Definition der Eta-Invariante $\eta(0)$. Da das Spektrum in diesem Fall explizit bekannt ist, kann $\eta(s)$ auf wohluntersuchte Dirichlet-Reihen zurückgeführt werden, die Polynomen in einer und zwei Variablen zugeordnet sind. Damit kann $\eta(0)$ effektiv für gegebenes m als Laurent-Polynom in T berechnet werden. Die Koeffizienten sind verwickelte Summen mit hypergeometrischen Summanden. Ich kann zeigen, daß $\eta(0)$ in Wirklichkeit ein Polynom in T ist; diese Aussage ist äquivalent zu den drei kombinatorischen Identitäten

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} \binom{n-\alpha-1}{n-\nu} = (-2)^n \binom{\alpha}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(\nu) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[X],\ \deg f < n,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{\alpha+\nu}{m} = (-1)^m \binom{\alpha}{m-n}, \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Numerische Rechnungen legen folgende Vermutung nahe.

Vermutung. *Für $m \in \mathbb{N}$ ungerade und $0 < T < 4\sqrt{m}$ ist*

$$\eta(0) = c_m (1 - T^2)^{m+1}$$

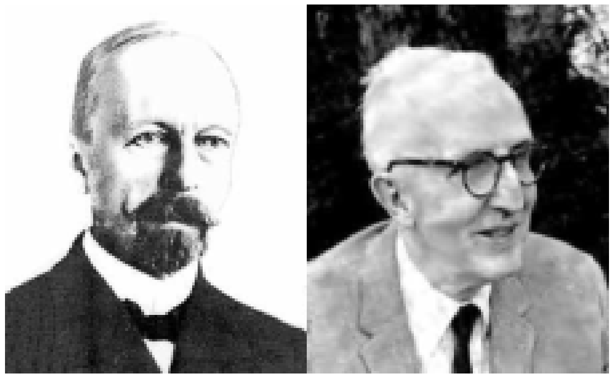
mit

$$c_m := -\frac{2}{m!} \sum_{l=0}^{m} \frac{B_{l+1}((m+1)/2)}{(l+1)!} \Phi^{(l)}\Big(-\frac{m-1}{2} \Big).$$

Dabei sind B_ν die Bernoulli-Polynome und $\Phi(X) := \prod_{i=0}^{m-1} (X+i)$.

Die Quersumme modulo 2 in dünnen Folgen

Jan-Christoph Puchta, Freiburg

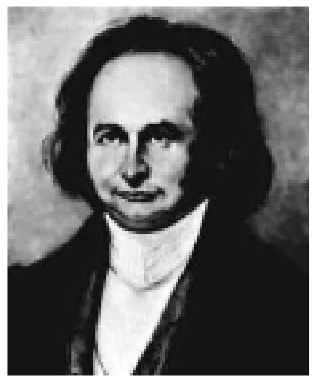


A. Thue, H.M. Morse

Ist $n = \sum_{k\geq 0} e_k(n)2^k$, $e_k \in \{0,1\}$, die Binärdarstellung von n, so bezeichne $s(n) := \sum_{k\geq 0} e_k(n)$ die binäre Quersumme. Dann wird die Thue-Morse-Folge $t(n)$ definiert als $t(n) = (-1)^{s(n)}$. In diesem Vortrag werden Abschätzungen für Summen der Form $\sum_{n\leq x} t(n)f(n)$ gegeben, wobei f eine zahlentheoretische Funktion ist. Diese Abschätzungen benutzen die Weylsche Ungleichung sowie die Fastperiodizität der Funktionen $n \mapsto t(n)t(n+h)$.

Die Anzahl ganzalgebraischer Zahlen in Quadern

Ulrich Rausch, Fulda



C.G.J. Jacobi

Es sei K ein (der Einfachheit halber) total reeller algebraischer Zahlkörper mit dem Grad $[K:\mathbb{Q}] = n$, der Diskriminante d und der Differente $\mathfrak{d}$.

Für $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ und positiv-reelle Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bezeichne $F(x;\alpha)$ die Anzahl der ganzen Zahlen $\nu \in K$, deren Konjugierte $\nu^{(p)}$ den Ungleichungen

$$|\nu^{(p)} + \alpha^{(p)}| \leq x_p, \qquad p = 1, \ldots, n$$

genügen. Ziel ist die Untersuchung des Gitterrests

$$\Delta(x;\alpha) := F(x;\alpha) - \frac{2^n}{\sqrt{d}} X, \quad \text{wo} \;\; X = x_1 \cdots x_n.$$

Fourierentwicklung bezüglich α liefert die divergente Reihe

$$\Delta(x;\alpha) \sim \sum_{\nu \in \mathfrak{d}^{-1}}{}' \, e^{-2\pi i \sum_{p=1}^{n} \alpha^{(p)} \nu^{(p)}} \prod_{p=1}^{n} \frac{\sin(2\pi\nu^{(p)} x_p)}{\pi \nu^{(p)}} \tag{1}$$

und die Parseval-Relation

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta^2(x;\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}}{}' \prod_{p=1}^{n} \frac{\sin^2(2\pi\nu^{(p)}x_p)}{(\pi\nu^{(p)})^2},$$

aus der man immerhin

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta^2(x;\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} O(\log^{n-1} X), & X \geq 2, \\ \Omega(\log^{n-1} X), & X \to \infty, \end{cases}$$

gewinnen kann. Hier bezeichnet $\mathcal{P}$ ein Fundamentalparallelotop des von den ganzen $\nu \in K$ bestimmten Gitters.

Eine brauchbarere Version von (1) erhält man, wenn man mittels

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(ae^{-v})\, e^{-v^2/\epsilon}\,\mathrm{d}v = \int_0^{\infty} e^{-a^2u}\Phi_\epsilon(u)\,\mathrm{d}u, \tag{2}$$

wo

$$\Phi_\epsilon(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{u^{s-1}}{\Gamma(s+1)}\, e^{\epsilon s^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \epsilon > 0,\ a \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R},$$

die charakteristische Funktion χ von $[0,1]$ glättet und gleichzeitig in e^{-a^2} transformiert. Setzt man $a = |\nu^{(p)} + \alpha^{(p)}|/x_p$ in (2) und multipliziert und summiert über ν, so wird

$$F(x;\alpha) = \sum_{\nu} \prod_{p=1}^{n} \chi\left(\frac{|\nu^{(p)} + \alpha^{(p)}|}{x_p}\right)$$

geglättet und in die Θ-Funktion

$$\begin{aligned} \Theta(u;\alpha) &= \sum_{\nu} e^{-\pi\sum_{p=1}^{n}|\nu^{(p)}+\alpha^{(p)}|^2 u_p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{du_1\cdots u_n}} \sum_{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}} e^{-\pi\sum_{p=1}^{n}|\nu^{(p)}|^2/u_p + 2\pi i\sum_{p=1}^{n}\alpha^{(p)}\nu^{(p)}} \end{aligned}$$

übergeführt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\pi\epsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(xe^v;\alpha)\, e^{-|v|/\epsilon}\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \Theta\Big(\frac{u}{\pi x};\alpha\Big) \prod_{p=1}^{n} \Phi_\epsilon(u_p)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{d}} \sum_{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}} e^{2\pi i\sum_{p=1}^{n}\alpha^{(p)}\nu^{(p)}} \prod_{p=1}^{n} I_\epsilon(\pi^2|\nu^{(p)}|^2 x_p^2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_\epsilon(B) &= \int_0^{\infty} e^{-B/u} u^{-1/2}\Phi_\epsilon(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(1-s)} B^{-s-1/2} e^{\epsilon s^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \sigma > -1/2. \end{aligned}$$

Das letzte Integral läßt sich mit Hilfe der Sattelpunktmethode zu

$$I_\epsilon(B) \approx \frac{e^{-\epsilon B}}{\sqrt{\pi B}} \sin(2\sqrt{B})$$

auswerten, und damit erhält man eine Reihe wie in (1), aber mit einem zusätzlichen konvergenzerzeugenden Faktor. Nachdem man diese trivial abgeschätzt hat, unterzieht man sie zur endgültigen Auswertung einer weiteren Fourierentwicklung, diesmal in bezug auf die Einheitengruppe (Siegelsche Summenformel). Anschließend wird die Glättung mittels eines Tauberschen Arguments wieder entfernt. Als Resultat ergibt sich

$$F(x;\alpha) = \frac{2^n}{\sqrt{d}} X + O(\log^n X), \qquad X \geq 2,$$

gleichmäßig in α.

Diese Methode läßt sich auf Charaktersummen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern ausdehnen und liefert ein Analogon des Satzes von Pólya-Vinogradov. Dieser lautet im total reellen Fall

$$\sum_{y_p < \nu^{(p)} \leq y_p + x_p} \chi(\nu) \ \ll \ \sqrt{N(\mathfrak{q})} \log^n X, \qquad X \geq 2,$$

für einen Nicht-Hauptcharakter χ mod $\mathfrak{q}$ und beliebige $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Die $\ll$-Konstante hängt dabei nur vom Körper K ab.

Zur Berechnung von Mittelwerten von Produkten geshifteter multiplikativer Funktionen

Wolfgang Schwarz, Frankfurt

S. Ramanujan

L. Lucht zeigte 1979, daß der Mittelwert $M(\tilde{F}_k)$ von

$$\tilde{F}_k : n \mapsto f_1(\beta_1 n + \alpha_1) \cdots f_k(\beta_k n + \alpha_k)$$

existiert, wenn $f_1, \ldots, f_k$ multiplikative Funktionen sind, die $|f_\kappa| \le 1$ und

$$\sum_p \frac{|f_\kappa(p) - 1|}{p} < \infty$$

erfüllen, und er gab eine Produktdarstellung der Gestalt $M(\tilde{F}_k) = \prod_p \eta(p)$.

Sei $\mathcal{A}^k$ die $\|\cdot\|_k$ – Hülle von $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{e^{2\pi i\alpha n}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, wobei

$$\|f\|_k := \left(\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \cdot \sum_{n\le x} |f(n)|^k \right)^{1/k}$$

ist. Für $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}^k$ ist $\tilde{F}_k \in \mathcal{A}^1$, also existiert $M(\tilde{F}_k)$. Die formelmäßige Berechnung stieß auf Schwierigkeiten; in den Proceedings der Zakopane Conference 1997 wurde für multiplikative $f \in \mathcal{B}^{2k-2}$ gezeigt, daß

$$M(\tilde{F}_k) = M(f_1) \cdots M(f_k) \cdot \prod_p \left(\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_k} a^*_{p^{\ell_1}}(f_1) \cdots a^*_{p^{\ell_k}}(f_k) \cdot M(\mathcal{C}_{p^{\vec{\ell}},\vec{\alpha}}) \right)$$

ist, wenn o.B.d.A. $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 1$ vorausgesetzt wird. Dabei ist

$$\mathcal{C}_{r_1,\ldots,r_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(n) = \prod_1^k c_{r_\kappa}(n + \alpha_\kappa).$$

Gemeinsam mit Frau E.H. Choi wird gezeigt, daß diese Mittelwertformel und die von L. Lucht erwartungsgemäß übereinstimmen, wobei neue Formeln für die Faktoren in der Mittelwertdarstellung hergeleitet werden, aber nur für $k = 2$. Für $k \ge 3$ macht die komplizierte Gestalt von $M\left(\mathcal{C}_{p^{\vec{\ell}},\vec{\alpha}}\right)$ große Schwierigkeiten.

Die Ziffern der Fibonacci–Zahlen

Jürgen Spilker, Freiburg

L. Pisano (Fibonacci)

Sei

$$F_n = e_k(n)10^k + \cdots + e_1(n)10 + e_0(n), \quad e_k(n), \ldots, e_0(n) \in \{0, \ldots, 9\},\ e_k(n) > 0,$$

die Dezimal–Darstellung der n–ten Fibonacci–Zahl. Von der Verteilung der Endziffern $e_0(n)$ und der Anfangsziffern $e_k(n)$ handelt der

Satz 1. a) *Die Funktion*

$$f_e(n) := \begin{cases} 1, & \textit{die Endziffer von } F_n \textit{ ist } e, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

ist periodisch mit Periode 60 und hat den Mittelwert

$$M(f_e) = \begin{cases} 1/15 & \textit{falls } e \textit{ gerade,} \\ 2/15 & \textit{falls } e \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

b) *Die Funktion*

$$g_e(n) := \begin{cases} 1, & \textit{die Leitziffer von } F_n \textit{ ist } e, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

ist fast–periodisch ($\in \mathcal{A}^1$) *und hat den Mittelwert*

$$M(g_e) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{e}\right). \qquad (\text{„}\textit{Benford–Gesetz}\text{“})$$

Von der Anzahl der Ziffern der F_n handelt der

Satz 2. c) *Die Anzahl der Ziffern der F_n bildet eine modulo m gleichverteilte Folge für alle $m \geq 2$.*

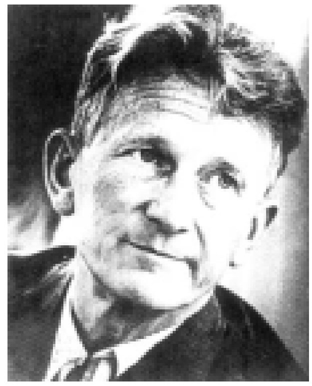
d) *Die Funktion*

$$c(k) := \begin{cases} 1, & \textit{es gibt genau 5 Zahlen } F_n \textit{ mit } k \textit{ Ziffern,} \\ 0, & \textit{es gibt genau 4 Zahlen } F_n \textit{ mit } k \textit{ Ziffern,} \end{cases} \qquad k > 1,$$

ist fast–periodisch ($\in \mathcal{A}^1$) *mit Mittelwert* $(\log_{10} \frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1} - 4 \approx 0,78$.

Über die Universalität von Zetafunktionen

Jörn Steuding, Frankfurt



A. Selberg

Voronin bewies, daß jede stetige Funktion $g : \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq r\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < r < 1/4$, die für $|s| < r$ analytisch ist, von der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ irgendwo im Streifen $1/2 < \Re s < 1$ beliebig genau approximiert wird, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\tau > 0$ mit

$$\max_{|s|\leq r} |\zeta(s + 3/4 + i\tau) - g(s)| < \epsilon.$$

Dieses Universalitätstheorem wurde u.A. durch Reich, Bagchi, Laurinčikas und Matsumoto verschärft bzw. auf andere Dirichletreihen ausgedehnt. Die Linniksche Vermutung besagt, daß alle Funktionen, die eine Dirichletreihenentwicklung besitzen und gewissen natürlichen Wachstumsbedingungen genügen, universell sind. Im Vortrag wird ein Universalitätstheorem für eine Teilmenge der Selbergklasse vorgestellt.

Es sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Menge aller Funktionen $F(s)$, die folgenden Axiomen genügen:

- Eulerprodukt: Es existieren komplexe Zahlen $\alpha_j(p)$, so daß
$$F(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \qquad \text{für } \Re s > 1;$$
dabei erstreckt sich das Produkt über alle Primzahlen p.
- Ramanujan-Petersson Vermutung: Es gilt $|\alpha_j(p)| = 1$ für $1 \leq j \leq n$ und alle bis auf endlich viele Primzahlen p.
- Mittelwert: Es gibt eine positive Konstante κ, so daß
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leq x} |a(p)|^2 = \kappa,$$
wobei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ ist.
- Analytische Fortsetzung: Es gibt eine ganze Zahl $m \geq 0$, so daß $(s-1)^m F(s)$ eine ganze Funktion endlicher Wachstumsordnung ist.
- Funktionalgleichung: Es existieren Zahlen $Q > 0, \lambda_j > 0, \mu_j$ mit $\Re \mu_j \geq 0$ sowie ω mit $|\omega| = 1$, so daß
$$\Lambda_F(s) := Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) F(s) = \omega \overline{\Lambda_F(1 - \overline{s})}.$$

Wir definieren noch den Grad von F durch $d_F := 2\sum_j \lambda_j$ (in Hinblick auf die Funktionalgleichung). Dann gilt:

Satz. *Sei* $1 \neq F \in \tilde{\mathcal{S}}$ *und* K *eine kompakte Teilmenge des Streifens*

$$\sigma_F := \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_F}\right\} < \Re s < 1$$

mit zusammenhängendem Komplement. Sei ferner $g(s)$ *eine stetige Funktion auf* K *ohne Nullstellen, die analytisch im Inneren von* K *ist. Dann gilt für beliebiges* $\epsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] \,:\, \max_{s\in K} |F(s+i\tau) - g(s)| < \epsilon\right\} > 0.$$

Trotz der vielen Voraussetzungen liefert dieser Satz die Universalität für $\zeta(s)$, Dirichletsche L-Funktionen, Dedekindsche Zetafunktionen, Heckesche L-Funktionen, L-Funktionen assoziiert zu Neuformen (bzw. elliptischen Kurven) und Artinsche L-Funktionen.

Additive arithmetische Halbgruppen: elementare Methoden

Stefan Wehmeier, Paderborn

F. Mertens

Eine additive arithmetische Halbgruppe ist ein von einer Menge P erzeugter freier kommutativer Monoid G mit Gradfunktion $\partial : G \mapsto \mathbb{N}_0$, so daß

$$\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b), \quad a, b \in G,$$

und

$$G(n) := \{a \in G \,|\, \partial(a) = n\}$$

endlich ist für jedes n. Äquivalent dazu ist die Voraussetzung, daß

$$P(n) := \{p \in P \,|\, \partial(p) = n\}$$

endlich ist für jedes n.

Ein klassisches Beispiel ist $G = \{f \in F_q[X]; f \text{ normiert}\}$; dann ist $G(n) = q^n$.

Wir betrachten nun G mit

$$G(n) = (A + r(n))q^n,$$

wobei $A > 0, q > 1$ feste Konstanten sind und $r(n) \to 0$ für $n \to \infty$. Ziel ist es, möglichst viele Sätze der multiplikativen Zahlentheorie unter möglichst schwachen Voraussetzungen an $r(n)$ zu übertragen.

J. Knopfmacher [5] arbeitete unter der Voraussetzung $r(n) = O(q^{-\epsilon n})$ mit einem $\epsilon > 0$. Neuere Arbeiten (z.B. Knopfmacher, Zhang [6]) verwenden in der Regel $r(n) = O(1/n^2)$ oder $\sum_n |r(n)| < \infty$, oder $r(n) = O(1/n)$ kombiniert mit $P(n) = O(q^n/n)$.

In diesem Vortrag wird gezeigt, daß es reicht, $r(n) = O(1/\ln(n)^2)$ und $P(n) = O(q^n/n)$ vorauszusetzen, um von manchen Sätzen der multiplikativen Zahlentheorie ein Analogon für G zu finden.

Man zeigt in wenigen Zeilen und völlig elementar:

- Der Cesaro-Limes von $P(n)/(q^n/n)$ ist 1. Der Limes braucht hingegen nicht zu existieren, wie schon Indlekofer, Manstavicius, Warlimont [4] gezeigt haben.
- Erster Satz von Mertens:

$$\sum_{k=1}^{n} P(k)/q^k = \ln n + C_1 + O(1/\ln n)$$

- Mertens-Formel:

$$1/n \prod_{\partial(p) \le n} (1 - 1/q^{\partial(p)})^{-1} \to A \exp(\gamma)$$

Aus der Mertens-Formel ergibt sich nach einem von Daboussi, Indlekofer [1] stammenden Verfahren der Satz von Halasz: Sei $f : G \mapsto \mathbb{C}$ multiplikativ und $|f| \le 1$. Falls $\sum_{p \in P} \big(1 - Re(f(p)\exp(it\partial(p)))\big)/q^{\partial(p)}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ divergiert, gilt

$$G(n)^{-1} \sum_{\partial(a)=n} f(a) \to 0.$$

Durch elementares Rechnen erhält man etwas komplizierter als im klassischen Fall die Turan-Kubilius-Ungleichung: Sei $f : G \mapsto \mathbb{R}$ stark additiv. Dann ist

$$G(n)^{-1} \sum_{\partial(a)=n} (f(a) - A(n))^2 = O(B^2(n)),$$

wobei

$$A(n) := G(n)^{-1} \sum_{\partial(p) \le n} f(p) G(n - \partial(p)), \quad B^2(n) := G(n)^{-1} \sum_{\partial(p) \le n} f(p)^2 G(n - \partial(p)).$$

Diese ist das entscheidende Hilfsmittel, um den Satz von Delange zu beweisen: Falls $\sum_p (1 - f(p))/q^{\partial(p)}$ konvergiert, existiert $M(f)$.

Manche Sätze lassen sich einschließlich ihres Beweises übertragen; dies trifft vor allem auf Arbeiten von Erdös zu:

- Für jede endlich verteilte additive Funktion $f : G \mapsto \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{p:\,|f(p)| \ge 1} 1/q^{\partial(p)}$ (vgl. [3]).
- Für jede Menge $S \subset G$, in der kein Element ein anderes teilt, konvergiert die Reihe $\sum_{a \in S} 1/(\partial(a) q^{\partial(a)})$ (vgl. [2]).

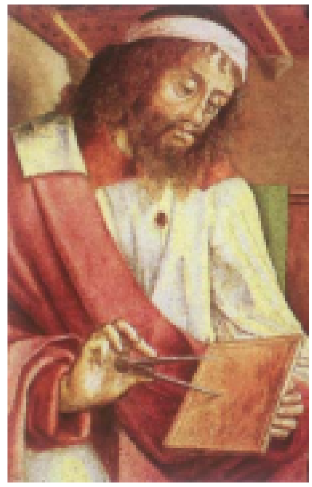
[1] H. Daboussi, K.–H. Indlekofer, Two elementary proofs of Halasz' theorem, Math. Z. 209(1992), 43-52

[2] P. Erdös, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London Math. Soc. 10(1935), 126-128

[3] P. Erdös, On the distribution function of additive functions, Ann. Math. 47(1946), 1-20
[4] K.–H.Indlekofer, E.Manstavicius, R.Warlimont, On a certain class of infinite products and arithmetical semigroups, Arch. Math. 56(1991), 446-453
[5] J. Knopfmacher, Analytic arithmetic of algebraic function fields, 1979
[6] J. Knopfmacher, W.–B. Zhang, Number theory arising from finite fields, 2001

Reguläre n–Ecke zu teilen

Eduard Wirsing, Ulm



Euklid

In „Praxis der Mathematik" 42(2000) stellt Herr Bartniczek die Frage, ob außer beim 12–Eck eine Diagonale ein Drittel der Fläche eines regulären n–Ecks abschneiden kann. Schreibt man $u(n,m)$ für das Verhältnis der von m Seiten und der Diagonalen umschlossenen Fläche zur Gesamtfläche des n–Ecks, so ist $u(12,5) = 1/3$, und die Frage lautet, ob $u(n,m) = 1/3$ für andere n, m vorkommt. Hierzu geben wir zwei Ergebnisse, die die Frage in sehr allgemeiner Form beantworten.

Satz 1. *Die einzigen Paare (n,m) mit $1 \le m \le n-1$, für die $u(n,m)$ rational ist, sind gegeben durch*

$$u(n,1) = 0, \quad u\big(n,\tfrac{n}{2}\big) = \tfrac{1}{2}, \text{ wenn } 2|n, \quad u(n,n-1) = 1, \tag{1}$$

$$u\big(n,\tfrac{n}{2} \pm 1\big) = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{2}{n}, \tag{2}$$

$$u(12,3) = \tfrac{1}{12}, \quad u(12,9) = \tfrac{11}{12}. \tag{3}$$

Insbesondere wird außer $0, 1/2, 1$, keiner dieser Werte mehrfach angenommen.

Satz 2. *Abgesehen von $0, 1/2, 1$ nimmt $u(n,m)$ keinen Wert mehrfach an.*

Ausgangspunkt für die Beweise ist die explizite Darstellung von u als

$$u(n,m) = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} q(n,m)\ , \quad q(n,m) = \frac{\sin(2\pi m/n)}{\sin(2\pi/n)},$$

anders geschrieben

$$q(n,m) = \frac{\xi^m - \xi^{-m}}{\xi - \xi^{-1}}\,,$$

wo $\xi = \xi_n$ die primitive n–te Einheitswurzel $e^{2\pi i/n}$ bezeichnet.

Für Satz 1 betrachtet man im Wesentlichen die Norm von Ausdrücken der Form $\xi - \xi^{-1}$.

Auch für die nichtrationalen $u(n,m)$ lassen sich die Grade dieser algebraischen Zahlen bestimmen, sowie, was natürlich mehr ist, die von ihnen erzeugten Körper. Tatsächlich ist der folgende Satz der wesentliche Schritt im Beweis von Satz 2.

Satz 3. *Es bezeichne $\mathcal{L}_n$ den größten totalreellen Teilkörper des n–ten Kreisteilungskörpers (das ist $\mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$). Gehört das Paar (n,m) nicht zu den Listen (1), (2), so ist $\mathbb{Q}\big(u(n,m)\big) = \mathcal{L}_n$ oder $= \mathcal{L}_{n/2}$, und zwar letzteres genau dann wenn $4|n$ und $2 \not| m$.*

Für den Grad von $u(n,m)$ erhält man daraus $\varphi(n)/2$ bzw. $\varphi(n)/4$ mit der Eulerschen Funktion φ. Damit erklären sich übrigens die scheinbaren Ausnahmen (3) in Satz 1: Es sind die einzigen Paare außerhalb der Listen (1) und (2) mit $\varphi(n) = 4,\ 4|n,\ 2 \not| m$.

Interessanterweise ist dieser Satz, der unter anderem den Grad zyklotomischer Einheiten betrifft, den Algebraikern anscheinend unbekannt.

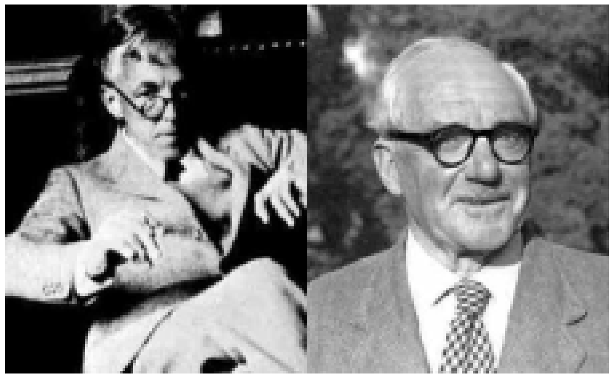
Um Satz 3 zu beweisen, zählen wir die Konjugierten von $u(n,m)$. Da die Automorphismen $\sigma_k\,, (k,n) = 1\,,$ des n–ten Kreisteilungskörpers durch $\sigma_k(\xi_n) = \xi_n^k$ definiert sind, ist zu untersuchen, für welche k man $\sigma_k(u(n,m)) = u(n,m)$ hat. Das führt auf die Gleichung

$$\xi^{km+1} + \xi^{-km-1} - \xi^{km-1} - \xi^{-km+1} - \xi^{k+m} - \xi^{-k-m} + \xi^{k-m} + \xi^{-k+m} = 0\,.$$

Die Hilfsmittel zur Klassifikation verschwindender Linearkombinationen von Einheitswurzeln findet man in einer schönen Arbeit von J.H. Conway und A.J. Jones in Acta Arithmetica XXX(1976), 229-240. Im Wesentlichen ergibt sich, daß sich die Terme unserer Gleichung paarweise oder in Tripeln aufheben. Mit einer allerdings etwas lästigen Fallunterscheidung folgt daraus der Satz.

Bemerkungen zum Primzahl–Zwillingsproblem

Dieter Wolke, Freiburg



G.H. Hardy, J.E. Littlewood

Die üblicherweise benutzte Formel

$$\psi_{2k}(x) := \sum_{n\le x-2k} \Lambda(n)\,\Lambda(n+2k) = \int_0^1 d\alpha\,|\,T(x,\alpha)|^2\,e(2k\alpha) \tag{1}$$

mit

$$T(x,\alpha) := \sum_{n\le x} \Lambda(n)\,e(n\alpha)$$

wird wie folgt modifiziert:

$$\psi_{2k}\Big(\frac{3}{2}\,x\Big) - \psi_{2k}(x) = \frac{1}{2A}\int_x^{\frac{2}{3}x} dy \int_0^1 d\alpha \big|S(y,\alpha)\big|^2 e(2k\alpha) + \mathrm{O}\Big(\frac{xk\ln x}{A}\Big) \tag{2}$$

mit

$$S(y,\alpha) := \sum_{y-A<n\le y+A} \Lambda(n)\,e(n\alpha),$$

wobei A „klein“ ist gegen x und $k \le A$. Dahinter steckt die Idee, daß in (1) für relativ kleines k unter den Paaren (n_1, n_2) nur die nahe der Diagonalen ernsthaft als Kandidaten für ψ_{2k} in Frage kommen.

Unter der Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung wird das Integral in (2) für $A = (\ln x)^C$ ausgewertet. Während die „Major arcs“ den erwarteten Hauptterm liefern, ergeben die „minor arcs“ einen verwickelten „expliziten“ Ausdruck mit Doppelsummen über nahe beieinander liegende Nullstellen von L–Reihen $L(s,\chi)$. Hieraus kann folgendes „fast alle“–Ergebnis hergeleitet werden:

Satz. *Es gelte die Riemannsche Vermutung für die Dirichletschen L–Reihen. Sei $C > 13$. Für alle $k \le (\ln x)^C$ mit höchstens $\mathrm{o}\big((\ln x)^C\big)$ Ausnahmen gilt dann*

$$\psi_{2k}\Big(\frac{3}{2}\,x\Big) - \psi_{2k}(x) = x\cdot\big(1+\mathrm{o}(1)\big)\cdot\prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p\mid k\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}.$$

Dies verbessert ein entsprechendes Resultat für das Goldbach–Problem von G. Dufner (1995, $C = 44$).

Problemstunde

Problem 1 (Wirsing)
Eigentlich kein Problem, sondern eine unterhaltsame Übungsaufgabe: Einem Quadrat $ABCD$ sei das gleichseitige Dreieck AEF mit E auf BC und F auf CD einbeschrieben. Man zeige *geometrisch*, daß die (kongruenten) Dreiecke ABE und ADF je den halben Flächeninhalt des Dreiecks ECF haben.

Damit kann man dann geometrisch zeigen, daß (in der Sprache meines Vortrags) $u(12,3) = 1/12$ ist: Drei Seiten und die Diagonale trennen von einem regulären 12–Eck ein Zwölftel der Fläche ab.

Problem 2 (Wolke)
Man weiß nach Hensley und Richards, daß die beiden folgenden Vermutungen unverträglich sind:

1) Primzahl–k–Tupel–Hypothese: Sei $k \geq 2, 0 \leq a_1 < \cdots < a_k$ ganze Zahlen, und für alle Primzahlen p gebe es eine Restklasse, in der kein a_j liegt. Man definiere
$$\pi(x, a_1, \ldots, a_k) := \#\{n \leq x \,|\, n + a_1, \ldots, n + a_k \in \mathbb{P}\}.$$
Dann gilt $\lim_{x\to\infty} \pi(x, a_1, \ldots, a_k) = \infty$.
2) $\pi(x + y) - \pi(y) \leq \pi(x)$ für alle $x, y \geq 2$.

Gilt Vergleichbares für B–Zahlen? Dabei heißt $n \in \mathbb{N}$ eine B–Zahl, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $n = a^2 + b^2$.

a) Wie sehen die Analoga für 1) und 2) aus?
b) Gilt auch für B–Zahlen ein Satz vom Hensley–Richards–Typ ?

Problem 3 (Elsholtz)
Ähnlich wie Herr Wolke frage ich nach einer Formulierung von drei Vermutungen, die Primzahl–Vermutungen verallgemeinern.

1) Für welche reellen Funktionen $f(x)$ ist $f(n), n \in \mathbb{N}$, unendlich oft prim?
Vermutungen:
$$f(x) = 2^x + 1 \text{ nur endlich oft (Fermat–Primzahlen)}$$
$$f(x) = \left[e^{\sqrt{17x}} + \log(x^x)\right] \text{ unendlich oft}$$
2) Wie stark darf bei einer Verallgemeinerung der k–Tupel–Vermutung von Hardy und Littlewood für Zahlen $n + a_1, n + a_2, \ldots, n + a_k,\ 1 \leq n \leq N$, der Parameter k mit N anwachsen? Ist vielleicht $k \approx \log N / \log\log N$ erlaubt?
3) Aktuelle Arbeiten von Friedlander, Iwaniec, Heath–Brown und Moroz beweisen, daß Polynome in mehreren Variablen wie $x^2 + y^4,\ x^3 + 2y^3$ und allgemeine binäre kubische Formen mit „vermuteter“ Häufigkeit prime Werte annehmen. So ist z.B.
$$\sum_{x^2+y^4 \leq N:\, x^2+y^4 \text{prim}} 1 \sim c\, \frac{N^{3/4}}{\log N}.$$
Inwieweit kann man Vermutungen aufstellen, die möglichst allgemein sind?

Als Beispiel kann man zunächst $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ betrachten, z.B. $f = a_1 x_1^{\alpha_1} + \cdots + a_r x_r^{\alpha_r}$ mit $\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_r} < 1$, $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_r) = 1$, $a_1, \ldots, a_r > 0$, f irreduzibel. Reichen diese Voraussetzungen aus oder kann man sie sogar abschwächen? Kann man zu allgemeineren Funktionen übergehen (siehe 1))? Was kann man für k–Tupel solcher Funktionswerte erwarten? So vermute ich zum Beispiel, daß $n + a_1$ und $n + a_2$ mit $a_2 - a_1 \equiv 0 \bmod 4$ für unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ simultan prime Werte der Form $x^2 + y^4$ annehmen. Andererseits könnte die Anzahlfunktion von k–Tupeln dieser Form sehr stark von dem Muster $(a_1, \ldots, a_k)$ abhängen.

Bei diesen Fragen geht es primär um die Formulierung guter Hypothesen und nicht so sehr um den Beweis derselben. Allerdings sollte man bei zu allgemeinen Vermutungen etwas vorsichtig sein. Auch interessante warnende Beispiele wären von Interesse.

Problem 4 (Schwarz)
Sei $f \in \mathcal{B}^k$, wobei $k \geq 1$ ist; somit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Konstanten $b_1, \ldots, b_R \in \mathbb{C}$, derart daß $\|f - \sum_{1 \leq r \leq R} b_r c_r\|_k < \epsilon$ ist, wobei $c_r : n \mapsto \sum_{d | \gcd(n,r)} d \cdot \mu(r/d)$ die r–te Ramanujansumme bezeichnet. Ist es möglich, die b_r unabhängig von ϵ zu wählen, d.h. gilt stets

$$\lim_{R \to \infty} \|f - \sum_{1 \leq r \leq R} a_r c_r\|_k = 0,$$

wobei a_r die Ramanujan–Koeffizienten $a_R = M(f c_r)/\varphi(r)$ sind? Für $k = 2$ ist dies wegen der Parsevalschen Gleichung richtig.

Problem 5 (Puchta)
Man definiere die Folge $s(n) \in \{0, 1\}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} s(1) &= 1, \\ s(n) &\equiv \sum_{\substack{k>0 \\ 1<k(k-1)/2<2n}} s\Big(n - \frac{k(k-1)}{2}\Big) + \delta(n) \bmod 2, \end{aligned}$$

mit $\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k(k-1)/2,\ n \text{ gerade}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Ein rechnerischer Beweis ergibt

$$s(n) = 1 \Leftrightarrow n = \square \quad \text{oder} \quad 2\,\square.$$

Gesucht ist ein Beweis, der einen einsichtigen Grund für dieses Verhalten liefert.

Problem 6 (Maier)
Man betrachte auf $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$ das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\lambda u && \text{in} \quad \mathring{\Omega}, \\ u &= 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda = m^2 + n^2, \;\; (m,n) \in \mathbb{Z}^2,$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{m,n}(x,y) = \sin(mx)\sin(ny).$$

Die Vielfachheit von λ ist

$$\nu(\lambda) = \#\big\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,\big|\, m^2 + n^2 = \lambda\big\}.$$

Für $\lambda = p_1 \cdots p_r,\;\; p_j \equiv 1 \bmod 4$ paarweise verschiedene Primzahlen, gilt

$$\nu(\lambda) = 2^{r+2}.$$

Also ist

$$\nu(\lambda) \geq \exp\Big(c\,\frac{\log\lambda}{\log\log\lambda}\Big)$$

unendlich oft ($c > 0$ fest).

Jetzt ersetze man Ω durch ein Kompaktum in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand. Es gelte für eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\nu(\lambda) \geq f(\lambda)$$

unendlich oft.
Frage: Ist dann immer

$$f(\lambda) \ll \exp\Big(c\,\frac{\log\lambda}{\log\log\lambda}\Big)$$

für geeignetes $c > 0$?

Problem 7 (Peter)
Sei $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_r]$ Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten, in dem jede der Variablen $x_1,\dots,x_r$ vorkommt.

Es ist bekannt (Peter):

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^r:\, f(\underline{n})\leq x} \Lambda(n_1)\cdots\Lambda(n_r) = \big(C + \mathrm{O}((\log\log x)^{-1})\big)x^\sigma(\log x)^\omega$$

mit $C, \sigma > 0, \omega \in \mathbb{N}_0,\;\; 0 \leq \omega \leq r-1$.

Problem: Man gebe eine Asymptotik an für

$$\sum_{\underline{p}\in\mathbb{P}^r:\, f(\underline{p})\leq x} 1.$$

Problem 8 (Spilker)
Verhält sich die Quersumme der n–ten Fibonacci–Zahl im Mittel wie $c\,n$?

Problem 9 (Indlekofer)
Für $M \subseteq \mathbb{Q}^+$ bezeichne $\langle M \rangle$ die von M erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.
a) Es ist bekannt:

$$\langle \{p+1\} \rangle = \mathbb{Q}^+ \iff \forall f \text{ vollständig multiplikativ:} (\forall\, p : f(p+1) = 1 \Rightarrow f = 1)$$

Man vermutet, daß für $n \in \mathbb{N}$ undlich viele Primzahlen p, q existieren mit $n = (p+1)/(q+1)$.
Beispiel für $n = 2 :\ \ 2 = (p+1)/(q+1) \Leftrightarrow 2q + 1 = p$ (q heißt dann Sophie–Germain–Primzahl)
Ferner ist bekannt (Elliott): $[\mathbb{Q}^+ : \langle \{p+1\} \rangle] \leq 3$
Das ist äquivalent zu

$$\operatorname{ord} \big(\{ f \mid f \text{ vollständig multiplikativ}, \forall\, p :\ f(p+1) = 1 \} \big) \leq 3.$$

b) Eine Verallgemeinerung von a): Die Menge

$$\mathcal{M} := \big\{ f \mid f \text{ vollständig multiplikativ},\ |f| = 1, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} f(p+1) = 1 \big\}$$

ist eine Gruppe bezüglich Multiplikation.
Es ist bekannt (Timofeev, Indlekofer): ord $\mathcal{M} \leq 4$.
Problem: Man beweise ord $\mathcal{M} \leq 3$.
Vermutlich gilt sogar $\mathcal{M} = \{1\}$.

Beim Wein

Munzingen am 11. 4. 2002

Lieber Herr Wolke, lieber Herr Spilker, liebe Freunde und Kollegen,

Jetzt, wo der erste Hunger und Durst gestillt sind, wo der Wein die Zunge angenehm löst, ohne sie noch im Lallen zu lähmen, scheint mir der rechte Augenblick, um kurz auf diese drei Tage zurückzublicken und, was zwangsläufig folgt, Ihnen, in erster Linie den Organisatoren, aber auch allen Teilnehmern, ohne deren Mitarbeit ja keine Tagung gelingt, für dieses schöne und wertvolle Erlebnis zu danken.

Dabei muß ich mich vorsorglich entschuldigen: Nur oberflächlich streifend und ohnehin nur wenige der gehaltvollen Vorträge kann ich berühren; und wohl möglich, daß der eine oder andere Teilnehmer sich nicht ganz so, wie er es wünschte, wird verstanden sehen. Gleich wie der Wein seine Reifezeit braucht, nicht zu bald genossen werden kann, sollte man besser die Eindrücke einer Tagung erst einsinken lassen. Aber, was hilft's, das Leben fordert uns, wie üblich, hier und jetzt. Genug also der Entschuldigungen.

Der Film gestern über den großen Logiker Kurt Gödel hat unübersehbar die Verquickung von Mathematik und Kunst herausgehoben. Und in der Tat: Gleich der erste Vortrag hat uns gezeigt, wie sehr noch der Kubismus lebt, der systematische formale Kubismus, um genau zu sein. Wenig später durften wir fünf Variationen in Oktaven lauschen.

Von der Kunst zur Philosophie: Nicht *die* Einheit ist unser Thema, vielmehr die Vielfalt der Einheit: Je mehr Einheiten desto faszinierender! Auch fragen wir in die Tiefe, spüren den Wurzeln der Einheit nach. Sind sie wohl abhängig? Aber auch dies wurde gesagt: Wer in höheren Sphären schwebt, sollte keinesfalls vergessen, sein Augenmerk auf die eigenen Werte zu richten.

Auch für praktische Fragen sind wir nicht zu fein. Doch, wer schöne große Räume bauen, und dabei Aufwendungen tunlichst vermeiden will, der sollte nicht vergessen, daß sich hinter Gittern, speziell quadratischen, zwar ungeahnte Schätze verbergen mögen; aber, wenngleich wir hinter Vieles gerne kommen möchten, *dahinter* doch wohl lieber nicht.

Nahtlos fügt sich das nächste Thema an. Die Tagungsleiter müssen aufgehorcht haben: Wo doch selbst kleine Lösungen heutzutage große Probleme schaffen, durften wir hören, daß man mit glatten Zahlen vieles glätten kann (Den ordinären Reim vom ‚schmieren und frisieren' möchte ich ich lieber nicht in den Mund nehmen).

Das Wichtigste, das universell Allumfassende zuletzt. *Der* Satz hat uns doch alle am meisten beeindruckt (Ich zitiere in leicht verallgemeinerter Fassung): *Wer die Mathematik kennt, der kennt die Welt!* Zwar, in der Diskussion deutete der Vortragende wohl auf die Möglichkeit, es könnte noch eine *Andere Welt* geben; die Frage wurde indessen nicht abschließend geklärt.

Wenn ich mich nun hier umschaue, an meinem Glas schnuppere, daraus koste, will mir scheinen, daß die Zwei-Welten-Theorie Vieles für sich hat. Und so bedanke ich mich zweifach, besser, ich spreche doch nicht nur für mich: Wir bedanken uns beieinander zweifach. Für die Mathematik, die wir voneinander gelernt haben und dazu für all das, was zu der anderen Welt gehört.

Zum Wohl! (Eduard Wirsing)

Adressen

Dr. Stephan Baier
Institut für Mathematik II
Freie Universität Berlin
Arnimallee 3
14195 Berlin
baier@math.fu–berlin.de

Dipl.–Math. Tobias Bekehermes
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal
Erzstraße 1
38678 Clausthal–Zellerfeld
tobias.bekehermes@tu–clausthal.de

Dipl.–Math. Valentin Blomer
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Valentin.Blomer@mathematik.uni–stuttgart.de

Dipl.–Math. Kathrin Bringmann
St.–Benedikt Str. 18
97072 Würzburg
Kathrin.Bringmann@gmx.de

Prof. Dr. Jörg Brüdern
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Joerg.Bruedern@mathematik.uni–stuttgart.de

Dipl.–Math. Rainer Dietmann
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Rainer.Dietmann@mathematik.uni–stuttgart.de

Dr. Christian Elsholtz
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal
Erzstraße 1
38678 Clausthal–Zellerfeld
elsholtz@math.tu–clausthal.de

Prof. Dr. Jürgen Hinz
Philipps–Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
35032 Marburg
hinz@mathematik.uni–marburg.de

Prof. Dr. Karl–Heinz Indlekofer
Fachbereich 17 Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
33095 Paderborn
k–heinz@uni–paderborn.de

Prof. Dr. Günter Köhler
Mathematisches Institut
Am Hubland
97074 Würzburg
koehler@mathematik.uni–wuerzburg.de

Prof. Dr. Ekkehard Krätzel
Universität Wien
Institut für Mathematik
Strudlhofgasse 4
1090 Wien
ekkehard.kraetzel@univie.ac.at

Prof. Dr. Gerald Kuba
Institut für Mathematik
Universität für Bodenkultur
Peter Jordan–Straße 82
1180 Wien
KUBA@edv1.boku.ac.at

Prof. Dr. Manfred Kühleitner
Institut für Mathematik
Universität für Bodenkultur
Peter Jordan–Straße 82
1180 Wien
kleitner@edv1.boku.ac.at

Prof. Dr. Helmut Maier
Abteilung Mathematik III
Universität Ulm
Helmholtzstraße 18
89069 Ulm
helmut.maier@mathematik.uni–ulm.de

Dr. Manfred Peter
Mathematisches Institut
Albert–Ludwigs–Universität
Eckerstr. 1
79104 Freiburg
Manfred.Peter@math.uni–freiburg.de

Prof. Dr. Ulrich Rausch
Kerschensteiner Straße 18
35039 Marburg
Ulrich.Rausch@web.de

Prof. Dr. Wolfgang Schwarz
Mathematisches Seminar
Johann Wolfgang Goethe–Universität
Robert–Mayer–Straße 6–10
60325 Frankfurt
schwarz@math.uni–frankfurt.de

Dipl.–Math. Stefan Wehmeier
Fachbereich 17 Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
33095 Paderborn
stefanw@math.uni-paderborn.de

Prof. Dr. Dieter Wolke
Mathematisches Institut
Albert–Ludwigs–Universität
Eckerstr. 1
79104 Freiburg
Dieter.Wolke@math.uni–freiburg.de

Prof. Dr. Lutz G. Lucht
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal
Erzstraße 1
38678 Clausthal–Zellerfeld
lucht@math.tu–clausthal.de

Prof. Dr. Werner Georg Nowak
Institut für Mathematik
Universität für Bodenkultur
Peter Jordan–Straße 82
1180 Wien
nowak@edv1.boku.ac.at

Dr. Jan–Christoph Puchta
Mathematisches Institut
Albert–Ludwigs–Universität
Eckerstr. 1
79104 Freiburg
jcp@arcade.mathematik.uni–freiburg.de

Prof. Dr. Jürgen Spilker
Mathematisches Institut
Albert–Ludwigs–Universität
Eckerstr. 1
79104 Freiburg
Juergen.Spilker@math.uni–freiburg.de

Dr. Jörn Steuding
Mathematisches Seminar
Johann Wolfgang Goethe–Universität
Robert–Mayer–Straße 6–10
60325 Frankfurt
steuding@math.uni–frankfurt.de

Prof. Dr. Eduard Wirsing
Abteilung Mathematik III
Universität Ulm
Helmholtzstraße 22
89069 Ulm
wirsing@mathematik.uni–ulm.de