Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Abgabefrist: 12.06.2017
Zu Beginn der Vorlesung.

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Take-home exam 1, 30.05.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Betrachte $\mathbb{N}$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{0, +\}$.

1. Zeige, dass für jede Primzahl p eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi_p(x)$ derart existiert, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(\mathbb{N}, 0, +) \models \varphi_p(n) \Leftrightarrow p|n.$$

2. Seien P und Q zwei disjunkte Teilmengen von Primzahlen. Zeige, dass es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ und $m \in M$ derart gibt, dass $(\mathbb{N}, 0, +) \preceq \mathfrak{M}$ und $p|m$ für jede $p \in P$, aber $q \nmid m$ falls $q \in Q$.

Aufgabe 2. (7 Punkte) Sei $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Sprache, welche aus einstelligen Relationssymbolen P_i besteht.

1. Gib eine Theorie T an, in deren Modellen $\mathfrak{M}$ die Kollektion $\{P_i^{\mathfrak{M}} : i \in \mathbb{N}\}$ aus unendlichen, paarweise disjunkten Mengen besteht.
2. Zeige, dass es Modelle $\mathfrak{M}$ von T mit unendlich vielen Elementen in $M \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\mathfrak{M}}$ gibt.
3. Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei solche Modelle wie im Teil 2. elementar äquivalent sind.

Aufgabe 3. (9 Punkte) Sei $\mathcal{L} = \{0, f\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathfrak{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathfrak{N}}(x) := x + 1.$$

1. Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k so gibt, dass $n = f^k(0) := \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{k}(0)$.
2. Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathfrak{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathfrak{N}}$ liegt.
3. Zeige die Existenz einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ und eines Elementes $m \in M$ mit $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ und $m \neq f^k(0)$ für alle k in $\mathbb{N}$.
4. Beschreibe drei abzählbare Modelle vom vollständigen Diagramm von $\mathfrak{N}$, die paarweise nicht isomorph sind. Wie sehen abzählbare Modelle im Allgemein aus?