Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Abgabefrist: 11U30 am 04.07.2017
beim Sekretariat Raum 312
Eckerstr. 1.

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Take-home exam 2, 27.06.2017

Aufgabe 1. (8 Punkte) Eine Menge X heiße *Dedekind-endlich*, falls jede Injektion $f : X \to X$ surjektiv ist.

1. Ist $\mathbb{N}$ Dedekind-endlich? und $\mathbb{R}$?
2. Zeige mit Induktion, dass jede natürliche Zahl Dedekind-endlich ist.

   HINWEIS: Falls $f : x \cup \{x\} \to x \cup \{x\}$ eine Injektion derart ist, dass $f(y) = x$ für ein $y \in x$, dann bilde eine neue Injektion $g : x \to x$ mit $g(y) = f(x)$.
3. Eine Menge A heiße *endlich*, falls sie in Bijektion mit einer natürlichen Zahl aus ω ist. Zeige, dass jede endliche Menge Dedekind-endlich ist.
4. Zeige mit Hilfe des Auswahlsaxioms, dass eine Menge A genau dann Dedekind-endlich ist wenn A keine Teilmenge enthält, welche gleichmächtig zu ω ist.

   HINWEIS: Für jede Ordinalzahl α, entweder ist α eine natürliche Zahl oder $\omega \subset \alpha$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Betrachte folgende $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{N}$, deren Universum die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind und $E^{\mathfrak{N}}(n, m)$, falls n ein Exponent in der Darstellung von m zur Basis 2 ist: d.h. $m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$, mit $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$, und $n = n_i$ für ein $1 \leq i \leq k$.

1. Zeige, dass **Extensionalität** in $\mathfrak{N}$ gilt:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \left(\forall z \left(zEx \Leftrightarrow zEy \right) \Rightarrow x = y \right).$$

2. Zeige, dass die Relation $E^{\mathfrak{N}}$ auf $\mathbb{N}$ *fundiert* ist, das heißt, es gibt keine unendliche Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus Elementen aus $\mathbb{N}$ mit $x_{n+1} E^{\mathfrak{N}} x_n$ für jedes n.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei α eine Limeszahl. Für jede Ordinalzahl $\beta < \alpha$ zeige, dass $\beta + \omega \leq \alpha$ gilt.
HINWEIS: $\beta + \omega = \bigcup_{n \in \omega} \beta + n$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Falls es Modelle von ZFC (in der Sprache $\mathcal{L} = \{\in\}$) gibt, zeige, dass es ein abzählbares Modell $\mathfrak{M}$ von ZFC und eine *nichtstandard* natürliche Zahl m aus M gibt, das heißt, dass m eine natürliche Zahl ist, aber $m \neq \underline{n}$ für jedes n aus $\mathbb{N}$.
Zeige, dass keine kleinste nichtstandard natürliche Zahl existiert.