Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 0, 25.04.2017

Aufgabe 1. Sei L_0 die Sprache welche aus einem einzigen zweistellige Funktionszeichen $\circ$ besteht. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als eine L_0-Struktur $\mathfrak{N}_0$, indem $\circ^{\mathfrak{N}_0}$ als die Multiplikation interpretiert wird.

a) Ist die Menge der Primzahlen definierbar in der Sprache L_0, eventuell mit Parametern?

Sei $L = L_0 \cup \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \lhd\}$ und betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als L-Struktur $\mathfrak{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \lhd^{\mathfrak{N}} = < .$$

b) Zeige, dass die Menge der Primzahlen in der Sprache L definierbar ist (ohne Parameter).

Drücke folgende Eigenschaften als L-Aussagen aus:

c) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.

d) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 2. Gegeben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Strukturen in einer Sprache L und Isomorphismen $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Zeige, dass $g \circ h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ ein Isomorphismus ist. Ferner, zeige, dass Isomorphismus eine Äquivalenzrelation für L-Strukturen ist.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Unterstrukturen einer gemeinsamen Struktur $\mathfrak{C}$ in einer Sprache L. Zeige, dass der Durchschnitt von A und B eine Unterstruktur von $\mathfrak{C}$ ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, 0, +, -)$ die Struktur der ganzen Zahlen. Beschreibe, die von $\mathbb{N}$ erzeugten Unterstruktur.

Aufgabe 5. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei elementar äquivalente L-Strukturen. Zeige, dass $\mathfrak{A}$ endlich ist genau dann wenn $\mathfrak{B}$ endlich ist.

Aufgabe 6. Es sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, |\cdot|)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen, wobei $|\cdot|$ die Betragsfunktion ist. Sei f ein neues Funktionszeichen. Gebe eine Aussage φ in der Sprache $\{0, 1, +, -, \cdot, <, |\cdot|, f\}$, derart, dass

$$\mathfrak{R}_1 = \left(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, |\cdot|, f^{\mathfrak{R}_1}\right) \models \varphi \Longleftrightarrow f^{\mathfrak{R}_1} \text{ gleichmäßig-stetig ist.}$$