Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 1, 03.05.2017

Aufgabe 1. In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei E eine zweistellige Relation ist, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei abzählbare $\mathcal{L}$-Strukturen, derart, daß $E^{\mathfrak{A}}$ eine Äquivalenzrelation mit einer einzigen Klasse mit nur 2 Elementen und sonst mit unendlich vielen unendlichen Klassen ist, und $E^{\mathfrak{B}}$ unendlich viele unendlichen Klassen sowie zwei Klassen mit jeweils zwei Elementen besitzt. Zeige:

1. $\mathfrak{A}$ lässt sich in $\mathfrak{B}$ einbetten.
2. $\mathfrak{B}$ lässt sich in $\mathfrak{A}$ einbetten.
3. $\mathfrak{A} \not\simeq \mathfrak{B}$.
4. $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$.

Aufgabe 2. In der obigen Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$ für eine Äquivalenzrelation, betrachte die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$, welche in zwei abzählbare Klassen geteilt wird. Sei $\mathfrak{B}$ die Struktur, welche aus einer abzählbare Klasse und eine Klasse der Mächtigkeit Kontinuum besteht. Zeige:

1. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ (mit Hilfe eines 'Back-and-Forth'-Systems).
2. $\mathfrak{A} \not\simeq \mathfrak{B}$.

Aufgabe 3. In einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$, betrachte eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \cdots)$ als eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, mit neuen Konstanten für jedes Element a aus A. Definiere das atomare Diagramm von $\mathfrak{A}$, $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$, als die Menge aller atomaren $\mathcal{L}_A$-Aussagen und Negationen davon, welche in $\mathfrak{A}$ gelten. Falls eine $\mathcal{L}_A$-Struktur B alle Aussagen aus $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ erfüllt, dann zeige, daß $\mathfrak{A}$ sich in $\mathfrak{B}$ einbetten lässt.

Aufgabe 4. Betrachte $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als $\mathcal{L}$-Strukturen in der Sprache $\mathcal{L} = \{+\}$. Gebe eine existentielle Formel $\varphi(x)$ und ein Element $a \in \mathbb{Z}$, so daß $\mathbb{Q} \models \varphi(a)$, aber $\mathbb{Z} \not\models \varphi(a)$,

Aufgabe 5. Ziege, daß folgende Formeln Tautologien sind:

1. $(\neg\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$.
2. $\psi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \varphi)$.
3. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$.
4. $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow (\cdots(\varphi_{n-1} \Rightarrow \varphi_n))))$.