**Abteilung für mathematische Logik**
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

# Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 2, 10.05.2017

**Aufgabe 1.** (4 Punkte) In einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$, seien $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi$, $\psi$ und $\chi$. Zeige, dass

$$(\varphi \vee \psi) \models \chi \text{ genau dann, wenn } \varphi \models \chi \text{ und } \psi \models \chi.$$

In der leeren Sprache (die nur aus $=$ besteht) zeige, dass die folgende Behauptung nicht allgemein gilt:

$$(\varphi \vee \psi) \models \chi \text{ genau dann, wenn } \varphi \models \chi \text{ oder } \psi \models \chi.$$

**Aufgabe 2.** (2 Punkte)
Zeige, dass wenn $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\psi$, dann $T \vdash \psi \Rightarrow \phi$.

**Aufgabe 3.** (2 Punkte) Zeige, dass $T$ inkonsistent ist genau dann, wenn $T \vdash \varphi$ für jede Aussage $\varphi$.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte) Gebe formelle Beweise folgender Formeln:

1. $\vdash \exists x \forall y \, (f(y) = x) \implies \forall y \forall z \, (f(y) = f(z))$;
2. $\vdash \exists x \, (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x \varphi \wedge \psi$,
   falls $x$ nicht frei in $\psi$ vorkommt.

**Aufgabe 5.** (8 Punkte) Betrachte $\mathcal{L}_{inz} = \{P, G, I\}$, wobei $I$ ein zweistelliges Relationszeichen, und $P$ und $G$ zwei einstellige Relationszeichen sind. Eine *Inzidenzstruktur* ist eine $\mathcal{L}_{inz}$-Struktur mit folgende Interpretationen: Die Elementen von $P$ heißen *Punkte* und die von $G$ *Geraden*. Die Elemente von $I$ werden *Inzidenzen* genannt und $I \subseteq P \times G$. Falls $(p, g)$ in $I$ liegt, sagen wir, dass der Punkt $p$ mit der Gerade $g$ inzidiert. Betrachte die folgenden Aussagen:

**A**0 Das Universum besteht aus Punkten und Geraden, und die Elementen von Punkten und Geraden sind disjunkt.

**A**1 Zu je zwei verschiedenen Punkte gibt es genau eine Gerade, die mit beiden inzidiert

**A**2 Zu jeder Gerade, gibt es zumindest zwei verschiedenen Punkte, die zu ihr inzidieren

**A**3 Es gibt drei Punkte, die nicht mit derselben Gerade inzidieren

Dann

1. Schreibe die Aussagen **A**0, **A**1, **A**2 und **A**3 in der Sprache $\mathcal{L}_{inz}$.
2. Sei $T_{inz} := \{\mathbf{A}0, \mathbf{A}1, \mathbf{A}2, \mathbf{A}3\}$. Zeige, dass in der Theorie $T_{inz}$ folgende Aussage erfüllt wird:

   Jeder Punkt inzidiert mit mindestens zwei verschiedenen Geraden.

Betrachte nun die folgende Aussage:

**A**4 Zu jeder Gerade $g$ und zu jedem Punkt $p$ gibt es genau eine zu $g$ *parallelen* Gerade, zu der $p$ inzidiert.

Zwei Geraden $g$ und $h$ heißen *parallel*, falls $g = h$ oder es gibt keinen gemeinsamen Punkt, der zu beiden inzidiert.

3. Schreibe die Aussage **A**4 in der Sprache $\mathcal{L}_{inz}$.

4. Gebe ein natürliches Beispiel eines Modells der Theorie $T_{inz} \cup \{\mathbf{A}4\}$.

5. Zeige, dass die folgende Struktur ein Modell von $T_{inz} \cup \{\neg\mathbf{A}4\}$ ist. Sei $X$ eine Menge mit drei Elementen und setze $[X]^2$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $X$. Das Universum $Z$ der Struktur $\mathfrak{Z}$ ist die disjunkte Vereinigung von $X$ und $[X]^2$. Interpretiere $P^{\mathfrak{Z}} = X$, $G^{\mathfrak{Z}} = [X]^2$, $I \subseteq P \times G$, und $(p, g) \in I^{\mathfrak{Z}}$ genau dann, wenn $p$ in $g$ enthalten ist.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass das Axiom **A**4 *unabhängig* von der Theorie $T_{inz}$ ist. Begründe, dass sie nicht vollständig.