Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 3, 17.05.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Gegeben eine widerspruchsfreie Theorie T derart, dass je zwei ihrer Modelle elementar äquivalent sind, zeige mit der Hilfe des Vollständigkeitssatzes, dass T vollständig ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Seien $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ zwei Sprachen. Gegeben eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$, bezeichne mit $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ die $\mathcal{L}_0$-Struktur mit Grundmenge A und mit denselben Interpretationen von $\mathfrak{A}$ für die Symbole aus der Teilsprache $\mathcal{L}_0$.

1. Gegeben $a_1, \ldots, a_n \in A$ und eine $\mathcal{L}_0$-atomare Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, zeige:
$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0 \models \psi(a_1, \ldots, a_n).$$
2. Nach Induktion über den Aufbau der Formel, zeige nun die obige Behauptung für jede $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
3. Aus den Vorigen schließe, dass, falls $\mathfrak{A}$ ein Modell von der $\mathcal{L}$-Theorie T ist und $T_0 \subseteq T$ eine Teilmenge von $\mathcal{L}_0$-Aussagen ist, dann ist $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ ein Modell von T_0.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Ein Element m heiße *maximal*, falls P kein Element enthält, welches echt größer als m ist. Ein Element x in P ist eine *obere Schranke* der Teilmenge $S \subset P$, falls $s \leq x$ für jedes $s \in S$ (Beachte, dass x nicht unbedingt in S liegen muß).

Zornsches Lemma. Sei P eine nichtleere partiell geordnete Menge derart, dass jede linear geordnete Teilmenge S eine obere Schranke in P besitzt. Dann enhält P ein maximales Element m.

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, falls es zu je zwei beliebigen Knoten v und w aus V einen *Pfad* in G gibt, der v und w verbindet: d.h. eine endliche Folge $v = v_0, v_1, \ldots, v_n = w$ mit $E(v_i, v_{i+1})$ für $0 \leq i < n$. Eine *Zusammenhangskomponente* ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.

1. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeige, dass jeder Knoten $v \in V$ in einer Zusammenhangskomponente liegt.
2. Zeige, dass wenn zwei Zusammenhangskomponente keinen leeren Durchschnitt haben, dann sind sie gleich.
3. Daraus schließe, dass der Graph G in einer disjunkten Vereinigung der Zusammenhangskomponenten zerlegt wird.

Aufgabe 4. (4 Punkte) In einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$, betrachte eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \cdots)$ als eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, mit neuen Konstanten für jedes Element a aus A. Definiere das elementare (oder vollständige) Diagramm von $\mathfrak{A}$, $\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$, als die Menge aller $\mathcal{L}_A$-Aussagen, welche in $\mathfrak{A}$ gelten.

1. Zeige, dass $\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$ eine vollständige $\mathcal{L}_A$-Theorie ist.
2. Sei $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, die ein Modell von $\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$ ist. Zeige, dass es eine Einbettung $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt, so dass für alle $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und für alle $a_1, \ldots, a_n$ in A:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(F(a_1), \ldots, F(a_n)).$$

   Bemerkung: eine solche Einbettung heiße eine *elementare Einbettung*.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht.

1. Gebe explizit eine $\mathcal{L}$-Theorie T derart, dass in jedem Modell $\mathfrak{M}$ von T sowohl $P^{\mathfrak{M}}$ als auch $\mathfrak{M} \setminus P^{\mathfrak{M}}$ unendlich sind.
2. Zeige mit Hilfe eines 'Back-and-Forth'-Systems, dass je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.
3. Ist T vollständig?