Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 4, 24.05.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) In einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$, betrachte eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \cdots)$ als eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, mit Konstanten für jedes Element a aus A. Das elementare Diagramm $\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ ist die vollständige $\mathcal{L}_A$-Theorie, welche aus allen $\mathcal{L}_A$-Aussagen besteht, die in $\mathfrak{A}$ gelten.
Mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes zeige, dass $\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$ eine Henkintheorie ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte) In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationsymbol ist, sei T die Theorie, welche besagt, dass E eine Äquivalenzrelation derart ist, dass in jedem Modell es für jede n aus $\mathbb{N}$ genau eine n-elementige Äquivalenzklasse gibt.
Gib eine explizite Axiomatisierung von T. Zeige, dass T ein abzahlbares Modell mit unendlich vielen unendlichen Äquivalenzklassen besitzt. Ferner zeige mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems, dass jede zwei solche Modelle elementar äquivalent sind.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter *zykelfreier* zusammenhängender Graph, das heißt dass es in G keine abgeschlossenen nicht-trivialen Pfaden gibt. Nimm an, dass G beliebig lange Pfaden hat. Betrachte G als eine natürliche $\mathcal{L}$-Struktur, wobei $\mathcal{L}$ aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Zeige, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{M}$ von G gibt, welche nicht zusammenhängend ist (als Graph mit Kanten $E^{\mathfrak{M}}$).
Insbesondere ist die Eigenschaft *Zusammenhängend zu sein* nicht elementar: d.h., durch eine Aussage erster Stufe gegeben.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Für eine natürliche Zahl n, heiße ein Element g aus G *n-Torsionselement*, falls $g^n = 1_G$. Die Torsion von G ist die Vereinigung aller n-Torsionselemente, für n beliebig. Die Gruppe G habe beschränkten Exponenten, falls es eine natürliche Zahl N gibt, so dass jedes Element aus G ein N-Torsionselement ist.

1. Für jede n aus $\mathbb{N}$, zeige, dass die n-Torsionselemente einer abelschen Gruppe G eine Untergruppe bilden.
2. In der Sprache $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ gib explizit eine $\mathcal{L}$-Theorie T_0 derart, dass jedes Modell von T_0 eine abelsche Gruppe ist.
3. Für ein Modell G von T_0, zeige, dass die Kollektion aller n-Torsionselementen eine definierbare Teilmenge von G ist.
4. Sei $T \supset T_0$ eine widerspruchsfreie $\mathcal{L}$-Theorie derart, dass jedes Modell G von T nur aus Torsion besteht. Zeige, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass jedes Modell G von T beschränkten Exponenten hat (höchstens N).