Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 5, 14.06.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $(X, <)$ eine partiell geordnete Menge.

1. Falls $<$ eine lineare Ordnung ist, zeige, dass jedes minimale Element von X kleinstes Element ist.
2. Falls X die Kollektion aller nicht-leeren Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit der partiellen Ordnung $\subset$ ist, beschreibe die minimalen Elemente von X. Besitzt X ein kleinstes Element?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $<$ eine lineare Ordnung auf der Menge X und bezeichne mit $(S_X, \subset)$ die partiell geordnete Menge aller von X verschiedenen Anfangssegmente von X. Definiere

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & S_X \\ & x & \mapsto & S_x = \{y \in X \mid y < x\} \end{array}.$$

1. Zeige, dass f streng monoton steigend ist. Schließe daraus, dass f injektiv ist.
2. Zeige, dass jeder beliebige Durschnitt von Elementen aus S_X wieder ein Anfangssegment von X ist.
3. Zeige, dass f genau dann bijektiv ist wenn $(X, <)$ wohlgeordnet ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Gegeben eine nicht-leere Menge I von Ordinalzahlen, betrachte die Menge

$$\bigcup I = \{y \mid \exists x \in I \text{ mit } y \in x\}.$$

1. Zeige, dass die Menge $\bigcup I$ transitiv ist.
2. Schließe daraus, dass $\alpha = \bigcup I$ wieder eine Ordinalzahl ist.
3. Zeige, dass $\beta \leq \alpha$ für jedes β aus I. Insbesondere ist $\alpha = \sup I$ das *Supremum* aller Ordinalzahlen aus I, das heißt, die kleinste Ordinalzahl, welche größer oder gleich aller Elemente aus i ist.
4. Falls $\alpha \notin I$, dann ist α keine Nachfolgerzahl, sondern eine Limeszahl.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

1. Seien α und β zwei Ordinalzahlen mit $\alpha < \beta$. Zeige, dass $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$.
2. Schliesse daraus, dass, falls α eine Limeszahl ist, dann es für jedes $\gamma < \alpha$ eine Ordinalzahl β mit $\gamma < \beta < \alpha$ gibt.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Seien $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ zwei linear geordnete Mengen. Setze

$$X \coprod Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$

und definiere folgendermaßen eine Ordnung $<$ auf $X \coprod Y$:

$$(a, i) < (b, j) \Longleftrightarrow \begin{cases} i < j, \\ a < b \text{ (für die entsprechende Ordnung), falls i=j.} \end{cases}$$

1. Zeige, dass $<$ eine lineare Ordnung ist.

2. Falls $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ beide Wohlordnungen sind, zeige, dass $<$ auch eine Wohlordnung auf $X \coprod Y$ definiert.