Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 6, 21.06.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien α und β zwei Ordinalzahlen. Beachte, dass falls es eine streng monoton steigende Abbildung $f : \beta \to \alpha$ gibt, dann ist $\beta \leq \alpha$.

1. Zeige, dass die Relation $\in$ auf jeder Teilmenge $A \subset \alpha$ eine Wohlordnung definiert.
2. Zeige, dass es für jede Teilmenge $A \subset \alpha$ eine Ordinalzahl $\beta \leq \alpha$ gibt, welche zu A in Bijektion ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Eine Menge A heiße *endlich*, falls sie in Bijektion mit einer natürlichen Zahl m aus ω ist. Bezeichne dies als $A \sim m$.

1. Mit Induktion zeige, dass die Menge
$$Y = \{n \in \omega \,|\, \forall y \subset n \,\exists m \in \omega \text{ mit } y \sim m\}$$
gleich ω ist. Schließe daraus, dass jede Teilmenge einer endlichen Menge wiederum endlich ist.
2. Zeige mit Induktion, dass jede linear geordnete nicht-leere endliche Menge ein kleinstes und ein größtes Element besitzt.
3. Schließe daraus, dass ω keine endliche Menge ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

1. Falls $A \sim \omega$, zeige mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein-Schröder, dass
$$\omega \sim A \coprod \underline{1} = A \times \{\underline{0}\} \cup \underline{1} \times \{\underline{1}\}.$$
2. Schließe daraus, dass ω^+ keine Nachfolgerzahl ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Definiere rekursiv die ordinale Exponentiation zur Basis ω:

- $\omega^0 = \underline{1}$,
- $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$,
- $\omega^\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \omega^\beta$, für α Limeszahl.

Zeige mit Hilfe der Rekursion, dass $\alpha \leq \omega^\alpha$ für jede Ordinalzahl α.

HINWEIS: Zeige zuerst, dass $\underline{1} \leq \omega^\alpha$ für jede Ordinalzahl α.