Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 7, 05.07.2017

Aufgabe 1. (10 Punkte)

1. Zeige, dass die Absolutsbetragsfunktion $|\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$
   primitiv rekursiv ist.

2. Zeige, dass die Funktion $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$
   primitiv rekursiv ist.

3. Zeige, dass die leere Menge primitiv rekursiv ist. Schließe daraus, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

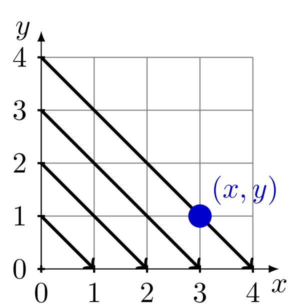
4. Zeige, dass die Diagonale $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\}$ eine primitiv rekursive Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ ist.

5. Sei $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Zeige, dass die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_{u<y} g(x_1, \ldots, x_n, u)$$

   auch primitiv rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Betrachte die Abbildung $\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \binom{x+y+1}{2} + x \end{array}$



Die Abbildung α bestimmt eine Aufzählung: der Wert $0 = \alpha(0,0)$ ist das kleinste Element mit Nachfolger $1 = \alpha(0,1)$. Auf jeder Diagonale ist der Nachfolger von $\alpha(x, y+1)$ der Punkt $\alpha(x+1, y)$. Der Nachfolger von $\alpha(x, 0)$ ist der Punkt $\alpha(0, x+1)$, wie im obigen Diagramm.

1. Schließe aus der Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x, y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x, y). Wie viele Punkte gab es auf den vorigen Geraden?

2. Zeige mit Induktion, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist.

3. Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

4. Zeige, dass die Funktionen β_1 und β_2 mit $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ primitiv rekursiv sind.

   HINWEIS: Zeige, dass $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

5. Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist. Insbesondere ist die Funktion $f : n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.