

## Abteilung für mathematische Logik

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro

Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

# Mathematische Logik

Sommersemester 2017

Übungsblatt 8, 12.07.2017

### Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  primitiv rekursiv und streng monoton wachsend. Zeige, daß das Bild  $f(\mathbb{N})$  von  $f$  eine primitiv rekursive Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist.

**HINWEIS:** Zeige zuerst, dass  $n \leq f(n)$  für jedes  $n$  aus  $\mathbb{N}$ .

### Aufgabe 2. (6 Punkte)

1. Zeige, dass die Menge  $\{(\ulcorner v \urcorner, \ulcorner t \urcorner) \mid \text{die Variable } v \text{ kommt im Term } t \text{ vor}\}$  primitiv rekursiv ist.
2. Zeige mit Hilfe beschränkter Rekursion, dass die Menge von (Gödelschen Zahlen von) Termen mit höchstens einer freien Variable auch primitiv rekursiv ist.
3. Schließe daraus, dass die Kollektion von (Gödelschen Zahlen von) Formeln mit höchstens einer freien Variable auch primitiv rekursiv ist.

**Aufgabe 3.** (3 Punkte) Zeige, dass die Theorie  $T$  in der leeren Sprache  $\{=\}$ , deren Modelle genau alle unendliche Mengen sind, effektiv axiomatisierbar ist.

**Aufgabe 4.** (8 Punkte) Sei  $\mathcal{L} = \{0, 1, +, P\}$  eine Sprache mit  $P$  ein einstelliges Relationszeichen und bezeichne  $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, P^{\mathfrak{N}})$ , mit  $P^{\mathfrak{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$ .

1. Zeige, dass sowohl die Ordnung  $<$  als auch der Graph der Nachfolgerfunktion durch  $\mathcal{L}$ -Formeln in der Struktur  $\mathfrak{N}$  definierbar sind.
2. Zeige, dass die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$  durch die Formel

$$P(y) \wedge P(y + x + x + 1) \wedge \neg \exists z (P(z) \wedge y < z < y + x + x + 1)$$

in  $\mathfrak{N}$  definierbar ist. Insbesondere ist die Abbildung  $x \mapsto x^2$  definierbar.

3. Zeige, dass die Menge  $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = x \cdot y\}$  in der Struktur  $\mathfrak{N}$  definierbar ist.

**HINWEIS:** Berechne  $(y + x)^2$ .

4. Schließe daraus, dass die Theorie  $Th(\mathfrak{N})$  unentscheidbar ist.