Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Mathematische Logik

Sommersemester 2017
Übungsblatt 9, 19.07.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell der Peanoarithmetik. Eine nicht-leere Teilmenge $X \subset M$ sei ein *Schnitt*, falls X ein Anfangssegment ist, welches unter der Nachfolgerfunktion abgeschlossen ist: $\forall x \in X \Rightarrow S(x) \in X$.

1. Zeige, dass $\mathfrak{M}$ einen Schnitt besitzt, welcher isomorph zu $\mathbb{N}$ ist.
2. Zeige, dass kein echter Schnitt in $\mathfrak{M}$ definierbar ist.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

1. Zeige, dass die Aussage $\forall x\,(x + 0 = 0 + x)$ beweisbar in Peanoarithmetik PA ist.
2. Gegeben ein Modell $\mathfrak{M}$ von PA, zeige, dass
$$M = \{y \in M | \, \forall x \in M \; (S(x + y) = S(x) + y)\}.$$
3. Schließe daraus, dass PA $\models \forall x \forall y\,(x + y = y + x)$.
4. Zeige, dass die Aussage in $\forall x\,(0 \cdot x = 0 \wedge S(0) \cdot x = x)$ in PA gilt.
   HINWEIS: Beachte, dass $\forall x\,(x = x \cdot S(0))$ in PA gilt.
5. Benutze, dass PA beweist, dass die Summe assoziativ ist, um zu zeigen, dass
$$M = \{y \in M | \, \forall x \in M \; (S(y) \cdot x = yx + x)\}$$
   in jedem Modell $\mathfrak{M}$ von PA.
   HINWEIS: Aus den obigen, begründe, dass PA $\models \forall x \forall y\,(S(x) + y = S(y) + x)$.
6. Schließe daraus, dass PA $\models \forall x \forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Gegeben ein Modell $\mathfrak{M}$ der Peanoarithmetik, zeige, dass jede nicht-leere mit Parametern definierbare Teilmenge $X \subset M$ ein kleinstes Element besitzt.
HINWEIS: Sonst, setze $Y = \{y \in M \,|\, \exists x \in X \text{ mit } x < y\}$. Zeige, dass $M \setminus Y$ nicht unter der Nachfolgerfunktion abgeschlossen sein kann.