**Abteilung für mathematische Logik**
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

**Abgabefrist:** 16.01.2018
Am Anfang der Vorlesung

# Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Take-home exam

**Aufgabe 1.** (4 Punkte) Sei $\mathcal{L} = \{P\}$ eine Sprache, wobei $P$ ein einstelliges Relationszeichen ist. Betrachte die Theorie $T$ in der Sprache $\mathcal{L}$, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart sind, dass sowohl $P^{\mathcal{A}}$ als auch $A \setminus P^{\mathcal{A}}$ unendlich sind.

1. Zeige, dass $T$ axiomatisierbar und vollständig mit Quantorenelimination ist.
2. Beschreibe das Primmodell von $T$, falls es existiert. Für jede Ordinalzahl $\kappa \geq \aleph_1$, wie sehen die $\kappa$-saturierte Modelle von $T$ aus? Gibt es saturierte Modelle von $T$?

**Aufgabe 2.** (4 Punkte) Seien $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ zwei Strukturen in einer Sprache $\mathcal{L}$ und $p$ ein 1-Typ über $A$, welcher in $\mathcal{A}$ ausgelassen wird. Betrachte eine Typenerweiterung $p \subset q$, mit $q$ in $S_1^{\mathcal{B}}(B)$ derart, dass für jede $\mathcal{L}_B$-Formel $\varphi(x, \bar{b})$ in $q$ es ein Element $a$ aus $A$ gibt, sodass $\mathcal{B} \models \varphi(a, \bar{b})$.
Zeige, dass $q$ kein isolierter Typ ist.

**Aufgabe 3.** (12 Punkte) Sei $R$ ein unitärer Nullteilerfreier Ring in Charakteristik 0, dessen Theorie in der Ringsprache Quantorenelimination hat. Beweise, dass $R$ ein kommutativer Ring ist. Folge dabei folgenden Überlegungen:

1. Wie sehen quantorenfreie Formeln $\varphi(x)$ in einer freien Variable aus?
2. Das Zentrum
$$Z(R) = \{r \in R \mid r \cdot s = s \cdot r \ \forall s \in R\}$$
ist eine definierbare Teilmenge von $R$, welche $\mathbb{Z}$ enthält (**Warum?**). Zeige: Falls $R \neq Z(R)$, dann gibt es ein nicht-triviales Polynom $q(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ kleinsten Grades, das auf $R \setminus Z(R)$ verschwindet.

   **HINWEIS:** Die Menge $Z(R)$ ist unendlich und wird durch eine quantorenfreie Formel definiert.
3. Zeige, dass das Element $r$ aus $R$ genau dann in $Z(R)$ liegt, wenn $r+1$ in $Z(R)$ liegt.
4. Schließe daraus, dass $q(X+1) - q(X)$ das Nullpolynom ist.

   **HINWEIS:** Gib eine explizite Formel für das Polynom $q(X+1) - q(X)$ an. Was ist sein Grad?
5. Zeige, dass das Polynom $q$ konstant ist.

   **HINWEIS:** Das Polynom $q(X) - q(0)$ hat unendlich viele Nullstellen.
6. Schließe daraus, dass $R$ ein kommutativer Ring ist.