Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 0, 27.10.2017

Aufgabe 1. Sei $L = \{R\}$ die Sprache, welche nur aus einer zweistelligen Relation R besteht. Betrachte die Theorie T des *Zufallsgraphen*, welche besagt, dass das Universum ein Graph derart ist, dass für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B es ein Element c gibt, mit $R(c, a)$ für jedes a in A aber $\neg R(c, b)$ für b aus B.

a) Gib eine Axiomatisierung von T an.

b) Zeige, dass T kein endliches Modell besitzt.

   HINWEIS: Falls $R(a, b)$ gilt, dann sind a und b verschieden.

c) Zeige mit Hilfe eines Back-and-Forth Systems, dass falls A und B Modelle von T sind, dann sind A und B elementar äquivalent.

Wir werden im Laufe des Kurses sehen, dass T widerspruchsfrei und somit vollständig ist.

Aufgabe 2. Gegeben eine widerspruchsfreie Theorie T in einer Sprache L und eine Formel $\varphi(x)$ derart, dass in jedem Modell $M \models T$ die definierbare Menge $\varphi(M)$ endlich ist, zeige, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$T \models \exists^{\leq N} x \varphi(x).$$

Aufgabe 3. Gegeben eine Sprache L und eine gerichtete Familie von L-Strukturen $\{A_i\}_{i \in I}$ derart, dass $A_i \preceq A_j$ falls $i \leq j$, zeige mit Hilfe von Tarskis Test, dass $A_i \preceq \bigcup_{j \in I} A_j$.

Aufgabe 4. Ein Filter F auf einer nicht-leeren Menge I ist eine Kollektion $\emptyset \neq F \subset \mathcal{P}(I)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \notin F$.
2. Für alle X und Y aus F, liegt $X \cap Y$ auch in F.
3. Falls $X \subset Y$ und X liegt in F, dann Y auch.

Eine Menge $\emptyset \neq B \subset \mathcal{P}(I)$ ist eine Filterbasis, falls kein endlicher Durschnitt von Elementen aus B leer ist.

a) Sei B eine Filterbasis. Zeige, dass B einen Filter bestimmt.

   Inbesondere, für $B = \{X\}$, mit $X \neq \emptyset$, ist der von B erzeugte Filter ein *Hauptfilter*.

b) Zeige, dass der Durschnitt von beliebigen Filtern wieder ein Filter ist.

c) Ist die Vereinigung einer Kette von Filtern wieder ein Filter? Ein *Ultrafilter* ist ein maximaler Filter. Zeige, mit Hilfe des Zorschen Lemmas, dass es Ultrafilter gibt.

d) Zeige, dass ein Ultrafilter sind genau solche Filter mit folgender Zusatzeigenschaft:

   4. Für jede Teilmenge $X \subset I$, muss entweder X oder das Komplement $I \setminus X$ in F liegen.

e) Zeige, dass jeder Hauptultrafilter von einer Einermenge erzeugt ist.

f) Falls I Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, zeige dass ein Ultrafilter U genau dann unter abzählbaren Durschnitten abgeschlossen ist, wenn U ein Hauptultrafilter ist.

g) Gegeben ein Ultrafilter U auf I und eine Folge von nicht-leeren Mengen $\{X_i\}_{i \in I}$, definiere die Relation $\sim_U$ auf $\prod_I X_i$ folgenderweise:

$$(a_i)_{i\in I} \sim_U (b_i)_{i\in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in U.$$

Zeige, dass $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation ist.