Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 1 **Abgabe:** 31.10.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) In einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$, betrachte eine nicht-leere Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei $T = \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage mit } A \models \varphi\ \forall A \in \mathcal{K}\}$

1. Zeige, dass T widerspruchsfrei ist.
2. Sei M ein Modell von T und ψ eine $\mathcal{L}$-Aussage. Falls $M \models \psi$, dann existiert $\mathcal{A}$ in $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{A} \models \psi$.
3. Angenommen, dass $\mathcal{K}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen verschiedener Mächtigkeit enthält, kann T vollständig sein?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

1. Zeige, dass jede unendliche Struktur $\mathcal{A}$ in einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$ einen partiellen Typ über A ausläßt. Welchen?
2. In der Ringsprache, gib einen partiellen Typ ohne Parameter an, welcher im algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ ausgelassen wird.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei T eine Theorie mit Quantorenelimination in einer Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben zwei Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von T mit $\mathcal{A}$ Unterstruktur von $\mathcal{B}$, zeige, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.
Eine Theorie mit dieser Eigenschaft heißt *modellvollständig.*

Aufgabe 4. (8 Punkte)

1. In einer Sprache $\mathcal{L}$, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen derart, dass es $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ und $\mathcal{B} \preceq \mathcal{D}$ zusammen mit einem nicht-leeren Back-and-Forth System zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ gibt. Zeige, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
2. Sei nun $\mathcal{L} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei jedes P_n ein einstelliges Prädikat ist. Gib eine Axiomatisierung der Theorie T an, welche besagt, dass es für je zwei disjunkte endliche nicht-leere Teilmenge s und t von $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente in $\left(\bigcap_{n\in s} P_n\right) \setminus \left(\bigcup_{k\in t} P_k\right)$ gibt.
3. Zeige, dass jedes Modell $\mathcal{A}$ von T eine elementar Unterstruktur eines Modells $\mathcal{M}$ derart ist, dass es für je zwei beliebige disjunkte Mengen I und J von $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente in $\left(\bigcap_{n\in I} P_n^{\mathcal{M}}\right) \setminus \left(\bigcup_{k\in J} P_k^{\mathcal{M}}\right)$ gibt.
4. Nimm an, dass T widerspruchsfrei ist. Schließe aus 1, dass T vollständig ist.