Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 10 **Abgabe:** 30.01.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in einer Sprache $\mathcal{L}$. Eine $\mathcal{L}_M$-Formel $\varphi(x)$ mit Parametern aus M in einer freien Variable x ist *minimal* in $\mathcal{M}$, falls $\varphi(M)$ unendlich ist aber für jede $\mathcal{L}_M$-Formel $\psi(x)$ entweder $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ oder $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ nur endlich viele Realisierungen in $\mathcal{M}$ hat.
Zeige, dass jede minimale Formel $\varphi(x)$ in $\mathcal{M}$ einen eindeutigen Typ in $S_1^{\mathcal{M}}(M)$ bestimmt:

$$p_\varphi = \{\psi(x)\, \mathcal{L}_M\text{-Formel} \,|\, (\varphi \wedge \psi)(M) \text{ ist unendlich}\}.$$

Aufgabe 2. (8 Punkte) In der Sprache $\mathcal{L} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{E\}$, wobei jedes c_n ein Konstantenzeichen und E ein 2-stelliges Relationszeichen ist, sei T die $\mathcal{L}$-Theorie der Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, sodass es für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ genau eine endliche Klasse der Mächtigkeit n gibt, nämlich die Klasse von $c_n^{\mathcal{A}}$.

1. Zeige, dass T Quantorenelimination hat und vollständig ist.

   Wofür brauchen wir Konstanten für die endlichen Klassen?

2. Zeige, dass T nicht $\aleph_1$-kategorisch, jedoch ω-stabil, ist.

3. Besitzt T ein Vaughtsches Paar?

4. Sei $\mathcal{M}$ das Primmodell von T. Zeige, dass $x = x$ minimal in $\mathcal{M}$ ist. Falls N eine echte elementar Erweiterung von $\mathcal{M}$ ist, bleibt $x = x$ noch minimal in N?

Aufgabe 3. (8 Punkte) In der Sprache $\mathcal{L} = \{0, S, <\}$, sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, S(x) = x + 1, <)$.

1. Zeige, dass in jedem $\aleph_0$-saturierten Modell $\mathcal{M}$ von $T = Th(\mathcal{N})$ Nichtstandardelemente existieren, d. h. Elemente m aus M derart, dass

$$m >^{\mathcal{M}} \underbrace{S^{\mathcal{M}} \circ \ldots \circ S^{\mathcal{M}}(0)}_{n} \text{ für jedes } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$

2. Zeige, dass T Quantorenelimination hat.

   Hinweis: $\mathcal{N} \models \forall x \exists y\, (x \neq 0 \longrightarrow S(y) = x)$.

3. Zeige, dass die Formel $x = x$ minimal in $\mathcal{N}$ ist.

4. Falls $\mathcal{M} \models T$ Nichtstandardelemente enthält, ist $x = x$ minimal in $\mathcal{M}$?