Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 11 **Abgabe:** 06.02.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei T eine vollständige Theorie in einer Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass T den Quantor $\exists^\infty$ eliminiert, und sei $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}$-Formel in einer freien Variablen mit Parametern aus einem Modell $\mathcal{M}$ von T. Zeige, dass falls $\varphi(x)$ minimal in $\mathcal{M}$ ist (siehe Aufgabe 1 im Blatt 10), es auch in jeder elementaren Erweiterung $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ minimal bleibt.

Aufgabe 2. (8 Punkte)

1. Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass es eine $\mathcal{L}_M$-Formel $\varphi(x, y)$ und eine Folge $(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass
$$\mathcal{M} \models \varphi(a_i, b_j) \iff i < j.$$
Zeige, dass es eine ununterscheidbare Folge $(c_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ gibt, sodass
$$\mathcal{N} \models \varphi(c_i, d_j) \iff i < j.$$
2. Falls $\varphi(x, y) = E(x, y)$ eine definierbare Äquivalenzrelation ist, gibt es eine Folge wie oben in der Struktur, welche aus unendlich vielen unendlichen E-Klassen besteht?
3. Gibt es für die Formel $\varphi(x, y) = x < y$, eine Folge wie oben in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$?
4. Sei $(\mathcal{M}, R^{\mathcal{M}})$ ein $\aleph_1$-saturierter Zufallsgraph, wobei $R^{\mathcal{M}}(a, b)$ genau dann gilt, wenn es eine Kante zwischen a und b gibt.
Gibt es für die Formel $\varphi(x, y) = R(x, y)$ eine Folge wie oben in $\mathcal{M}$?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

1. Gegeben eine ununterscheidbare Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in einem Modell $\mathcal{M}$ der Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen ohne Randpunkte und eine endliche Teilmenge $B \subset M$, zeige, dass es eine natürliche Zahl N gibt, sodass die Teilfolge $(a_i)_{i\geq N}$ ununterscheidbar über B ist.
2. In einem $\aleph_1$-saturierten Zufallsgraph finde eine ununterscheidbare Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und ein Element b derart, dass für kein k aus $\mathbb{N}$ die Teilfolge $(a_i)_{i\geq k}$ ununterscheidbar über die Einermenge $\{b\}$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Zwei Tupel a und b in einer Struktur $\mathcal{M}$ in einer Sprache $\mathcal{L}$ haben denselben *starken Typ* über die Teilmenge C von M, falls a und b in derselben Klasse bezüglich jeder über C definierbaren Äquivalenzrelation mit nur endlich vielen Äquivalenzklassen liegen.

1. Zeige, dass $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a/C) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/C)$, wenn a und b denselben starken Typ über C haben.

   HINWEIS: Jede definierbare Menge bestimmt eine Zerlegung und somit eine Äquivalenzrelation.

2. Zeige, dass alle Mitglieder einer unendlichen ununterscheidbaren Folge über C denselben starken Typ über C haben.