Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 2 **Abgabe:** 7.11.2017

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist *torsionfrei*, wenn sie keine Torsionselemente besitzt: das heißt, für jedes x aus G mit $x^n = 1_G$ für ein n aus $\mathbb{N}$, ist $x = 1$. Die Gruppe ist eine *Torsionsgruppe*, falls jedes Element ein Torsionselement ist. Die Gruppe ist *teilbar*, falls jedes Element aus G eine n-te Potenz für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist.

Sei $\mathcal{L}_{Gps} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ die Gruppensprache.

1. Ist die Klasse abelscher torsionsfreier teilbarer Gruppen axiomatisierbar?
2. Ist die Klasse abelscher Torsionsgruppen axiomatisierbar?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

In einer Sprache $\mathcal{L}$, sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von L-Strukturen $\{A_i\}_{i\in I}$, das heißt, dass A_i Unterstruktur von A_j ist, falls $i \leq j$. Gegeben eine $\mathcal{L}$-Aussage φ mit Pränexnormalform

$$\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \cdots \exists y_k \psi(\bar{x}, \bar{y}),$$

wobei ψ quantorenfrei ist, zeige: Falls φ in $\mathcal{A}_i$für jedes i aus I gilt, erfüllt $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ auch φ.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

In einer Sprache $\mathcal{L}$, sei T eine widerspruchsfreie Theorie, welche keine endlichen Modelle besitzt. Sei $\kappa > |\mathcal{L}|$ eine unendliche Kardinalzahl derart, dass je zwei Modelle von T der Mächtigkeit κ isomorph sind. Zeige mit Hilfe von Löwenheim-Skolem, dass T vollständig ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

In einer Sprache $\mathcal{L}$, sei T eine widerspruchsfreie modellvollständige Theorie, das heißt, dass für je zwei Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von T mit $\mathcal{A}$ Unterstruktur von $\mathcal{B}$ gilt, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Gegeben ein Modell $\mathcal{A}$ von T, zeige, dass $T \cup \text{Diag}(\mathcal{A})$ eine vollständige Theorie ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Seien $\mathcal{L}$ eine Sprache mit Konstantenzeichen $\{c_i\}_{i\in I}$, wobei I nicht leer ist.

1. Zeige, dass in jeder $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ die kleinste Unterstruktur existiert. Beschreibe ihre Elemente.

Die kleinste Unterstruktur von $\mathcal{A}$ heißt die von $\emptyset$ erzeugende Unterstruktur.

Seien nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen, welche dieselben quantorenfreien Aussagen erfüllen. Bezeichne mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, bzw. mit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{B}$, die von $\emptyset$ erzeugende Unterstruktur in $\mathcal{A}$, bzw. in $\mathcal{B}$. Betrachte folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} h: & C & \to & C' \\ & t^{\mathcal{A}}[c_{i_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{i_n}^{\mathcal{A}}] & \mapsto & t^{\mathcal{B}}[c_{i_1}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{i_n}^{\mathcal{B}}] \end{array}$$

wobei die Konstanten $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ im $\mathcal{L}$-Term $t[c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}]$ vorkommen.

2. Zeige, dass h wohldefiniert und injektiv ist.
3. Zeige, dass h ein Isomorphismus ist.