

## Abteilung für mathematische Logik

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro

Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

# Modelltheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 3 **Abgabe:** 14.11.2017

### Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei  $T$  die Theorie des Zufallsgraphen in der Sprache  $\mathcal{L} = \{R\}$  (siehe Aufgabe 1 im Blatt 0). Angenommen, dass  $T$  widerspruchsfrei ist, zeige, dass  $T$  Quantorenelimination hat und vollständig ist.

### Aufgabe 2. (6 Punkte)

Sei  $\mathcal{L} = \{E_n\}_{1 \geq n \in \mathbb{N}}$  eine Sprache, wobei jedes  $E_n$  ein zweistelliges Relationszeichen ist. Betrachte die Theorie  $T$  in der Sprache  $\mathcal{L}$ , deren Modelle genau die  $\mathcal{L}$ -Strukturen derart sind, dass jedes  $E_n$  eine Äquivalenzrelation ist, wobei  $E_1$  unendlich viele Klassen besitzt und  $E_{n+1} \subset E_n$ . Ferner zerlegt jede  $E_n$ -Klasse in unendlich vielen  $E_{n+1}$ -Klassen.

1. Gib eine Axiomatisierung von  $T$  an.
2. Zeige, dass  $T$  widerspruchsfrei ist.

**HINWEIS:** Sei  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  die Menge der abzählbaren Folgen aus natürlichen Zahlen. Für  $f$  und  $g$  aus  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , setze  $E_1(f, g)$  falls  $f(1) = g(1)$ . Wie definiert man nun  $E_n$ , so dass  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  ein Modell von  $T$  ist?

3. Zeige, dass  $T$  Quantorenelimination hat und vollständig ist.

**Aufgabe 3.** (2 Punkte) In der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ , sei  $\text{ACF}_p$  die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ , wobei  $p$  entweder 0 oder Primzahl ist. Gegeben eine  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Formel  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ , zeige, dass es eine natürliche Zahl  $N$  derart gibt, dass für jedes Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  aus einem Modell  $K$  von  $\text{ACF}_p$  die Menge

$$\varphi(K, a_1, \dots, a_n) = \{b \in K \mid K \models \varphi(b, a_1, \dots, a_n)\}$$

entweder unendlich oder der Mächtigkeit höchstens  $N$  ist.

### Aufgabe 4. (8 Punkte)

Sei  $\mathcal{L}$  die Sprache, welche aus einem zweistelligem Relationszeichen  $E$  und einem einstelligem Funktionszeichen  $f$  besteht. Betrachte die Klasse  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathcal{A}$  derart, dass  $E^{\mathcal{A}}$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$  mit unendlich vielen Klassen ist. Ferner ist die Abbildung  $f^{\mathcal{A}}$  eine Bijektion ohne Zykeln, welche jede  $E^{\mathcal{A}}$ -Klasse permutiert, das heißt:

- Es existiert kein  $a$  aus  $A$  mit  $f^n(a) = a$  für eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ .
- Für jedes  $A$  aus  $A$  gilt  $E^{\mathcal{A}}(a, f^{\mathcal{A}}(a))$ .

1. Zeige, dass die Klasse  $\mathcal{K}$  axiomatisierbar ist.

2. Zeige, dass  $\mathcal{K}$  nicht leer ist (Insbesondere ist  $\text{Th}(\mathcal{K})$  widerspruchsfrei).

**HINWEIS:** Gib eine geeignete  $\mathcal{L}$ -Struktur auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  an.

3. Gegeben  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{K}$ , zeige, dass es eine elementare Erweiterung  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{M}$  derart gibt, welche unendlich viele neue  $E^{\mathcal{M}}$ -Klassen besitzt, wobei jede  $E^{\mathcal{M}}$ -Klasse unendlich viele  $f^{\mathcal{M}}$ -Orbits hat.

4. Zeige, dass  $\text{Th}(\mathcal{K})$  Quantorenelimination hat und vollständig ist.